Paradojas y fundamentos

Juan Eduardo Nápoles Valdés

Preliminares

"No debo buscar mi dignidad en el espacio, sino en el cuidado de mi pensamiento. Si fuera por el espacio, el universo me tragaría y me comprehendería como a un punto; por el pensamiento, yo lo comprendo a él"
Pascal

Una paradoja ha sido descrita como una verdad ubicada en la cabeza para llamar la atención. Por supuesto que ellas nos preocupan, divierten, exasperan y seducen. Más importante aún, despiertan curiosidad, la estimulan y la motivan.
El concepto de paradoja puede entenderse como uno de los siguientes:

1. Una declaración contradictoria que parece ser cierta.
2. Aquello que exhibe aspectos o cualidades contradictorias o inexplicables.
3. Una declaración esencialmente contradictoria basada en un razonamiento válido de suposiciones lógicas.

Existen varios tipos de paradojas:

1. Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas.
2. Afirmaciones que parecen verdaderas, pero que en realidad son falsas.
3. Cadenas de razonamientos aparentemente correctas, pero que conducen a contradicciones lógicas (a éstas se les llama *falacias).*
4. Declaraciones cuya veracidad o falsedad es indecidible.

Nosotros usaremos el término paradoja en un amplio sentido para significar una inconsistencia, un contraejemplo como ayuda para clarificar nociones, una idea falsa, un planteamiento verdadero que parece ser falso. Existen varias formas en que las paradojas han desempeñado un papel importante en la evolución de las Matemáticas. Su resolución ha exigido abandonar armazones conceptuales existentes y ha estimulado a menudo el nacimiento de ideas matemáticas importantes. De hecho, como Bell y Davis, respectivamente, puntualizan:

"Los errores y las dificultades sin resolver del pasado en Matemáticas han sido siempre las oportunidades de su futuro"[1].

> *"Uno de los aspectos de fascinación sin fin de las Matemáticas, es que sus paradojas más espinosas tienen una manera de la floración en teorías hermosas"*[2].

Las paradojas pueden ser útiles también en el aula. La confusión y la inseguridad temporales que pueden generarse en los alumnos -también llamados *conflictos cognitivos*- pueden ser destinadas al buen uso docente. Los conflictos generados son dispositivos pedagógicos útiles (proporcionados, por supuesto, en el tratamiento de dichos conflictos). Pueden fomentar la actitud positiva de "seguir pegados", proporcionan la oportunidad de participar en la discusión y revisiones matemáticas y de promover la realización de estas acciones que las Matemáticas desarrollan a menudo de esta misma manera. Los profesores pueden ganar una apreciación mejor de las dificultades de los estudiantes al tratar con conceptos y resultados con los cuales algunos de los matemáticos más grandes de todos los tiempos, lucharon. Tales conceptos y resultados, que eran paradójicos y desafiadores en ese entonces, se convirtieron en lenguaje común en generaciones posteriores. En palabras de Kasner y Newman:

> *"El testamento de la ciencia es un flujo continuo en que la herejía de ayer es la inspiración'*[3] *de hoy y el fundamentalismo de mañana".*[4]

En esta Conferencia, presentaremos diferentes ejemplos de paradojas, tomadas de la Historia de la Matemática, las cuales han inspirado la clarificación de conceptos básicos y la introducción de resultados importantes, hemos abarcado diversas áreas que van desde la Aritmética hasta la Teoría de Conjuntos, tocando incluso tópicos

---

[1] E. T. Bell-"The development of mathematics", 2nd ed., McGraw-Hill, 1945, p. 283.
[2] P.J. Davis-"Numbers", Sc. Amer. 211 (Sept.) 1964, 51-59, específicamente la p. 55.
[3] Gospel en el original en inglés.
[4] E. Kasner and J.R. Newman-"Mathematics and imagination", Simon & Schuster, 1967, p. 193.

físicos (a los que no pudimos resistirnos) como el viaje en el tiempo. La repercusión pedagógica de estos temas será también analizada.

Capítulo 1
Mundo griego

Para apreciar nuestra propia Edad de Oro de la Matemática debemos tener en cuenta algunas de las grandes y sencillas directrices de aquellos cuyo genio preparó hace largo tiempo el camino para nosotros, y debemos lanzar una ojeada a las vidas y obras de tres griegos: Zenón (495-435 a.C.), Eudoxio (408-355 a.C.) y Arquímedes (287-212 a.C.). Euclides será mencionado más tarde, donde encuadra mejor su obra.

Zenón y Eudoxio son representantes de dos vigorosas y opuestas escuelas de pensamiento matemático que florecen en la actualidad, la crítica destructiva y la crítica constructiva. La mente de ambos poseía un espíritu crítico tan penetrante como la de sus sucesores de los siglos XIX y XX. Este juicio puede, como es natural, invertirse: Kronecker (1823-1891) y Brouwer (1881-1966), los críticos modernos del Análisis Matemático, las teorías del infinito y del continuo, son tan antiguas como Zenón; los creadores de las teorías modernas de la continuidad y el infinito, Weierstrass (18151897), Dedekind (1831-1916) y Cantor (1845-1918) son contemporáneos intelectuales de Eudoxio.

Arquímedes, la inteligencia más grande de la antigüedad, es moderno hasta el tuétano. Él y Newton podían haberse comprendido perfectamente, y es muy posible que Arquímedes, si hubiera podido vivir hasta seguir un curso de postgraduado en Matemática y Física, hubiera comprendido a Einstein, Bohr, Heisenberg y Dirac mejor que éstos se han comprendido entre sí. De todos los antiguos, Arquímedes es el único cuyo pensamiento gozó de la libertad que los matemáticos más grandes se permiten actualmente después que 25 siglos han alisado su camino. Arquímedes es el único entre los griegos que tuvo la suficiente altura y vigor para ver claro a través de los obstáculos colocados en la senda del progreso matemático por los aterrorizados geómetras que habían escuchado a los filósofos.

Cualquier enumeración de los tres matemáticos más grandes de la historia, incluiría el nombre de Arquímedes. Los otros dos que de ordinario se asocian a él son Newton (1642-1727) y Gauss (1777-1855) Quienes consideran la relativa pobreza de la ciencia matemática y física en las respectivas edades en que estos gigantes vivieron y comparen sus conquistas con el carácter de sus tiempos colocarían a Arquímedes en el primer lugar. Si los matemáticos y hombres de ciencia griegos hubieran seguido a Arquímedes en vez de a Euclides, Platón y Aristóteles, seguramente habrían anticipado en dos millares de años la edad de la Matemática moderna, que comenzó con Descartes (1596-1650) y Newton en el siglo XVII, y la edad de la ciencia física moderna, inaugurada por Galileo (1564-1642) en el mismo siglo.

Tras estos tres precursores de la época moderna se alza la figura semi mística de Pitágoras (569?-500? a.C.), matemático místico, investigador de la naturaleza, *"una décima de genio y nueve décimas de aguda mentira"* como se ha afirmado en ocasiones. Su vida tiene algo de fábula, rica con el increíble aumento de sus prodigios, siendo el hecho más importante para el desarrollo de la Matemática el haberla distinguido del extraño misticismo de los números con que revistió sus especulaciones cósmicas. Viajó por Egipto, aprendió mucho de sus sacerdotes, visitó Babilonia y repitió sus experiencias de Egipto; fundó una secreta hermandad para el alto pensamiento matemático y las especulaciones físicas, mentales, morales y éticas, en Cretona, en el sur de Italia, y además realizó dos de las más grandes contribuciones a la Matemática. Según la leyenda, murió en las llamas de su propia escuela quemada por los fanáticos políticos y religiosos que azuzaron a las masas para protestar contra la instrucción que Pitágoras pensaba darles. *Sic transit gloria mundi.*

Antes de Pitágoras, nadie, se había dado clara cuenta de que la prueba debe proceder de las suposiciones. De acuerdo con la tradición, Pitágoras fue el primer europeo que insistió en que los axiomas, los postulados, deben establecerse al principio, en el desarrollo de la Geometría, y que todo el desarrollo descansa en las aplicaciones del razonamiento deductivo partiendo de los axiomas. Siguiendo la práctica corriente emplearemos la palabra "postulado" en lugar de "axioma", pues el axioma tiene una perniciosa asociación histórica de "verdad evidente por sí misma", que no tiene el postulado. El postulado es una arbitraria suposición establecida por el matemático mismo y no por Dios Todopoderoso.

Pitágoras estableció, pues, la prueba en la Matemática. Ésta es una conquista. Antes de él, la Geometría había sido una colección de reglas a las que se había llegado empíricamente, sin una clara indicación de que estuvieran relacionadas entre sí y sin la más leve sospecha que pudieran deducirse de un número relativamente pequeño de postulados. La prueba constituye hoy el verdadero espíritu de la Matemática y nos parece difícil imaginar cómo pudo prescindir de ella el razonamiento matemático.

La segunda contribución matemática sobresaliente de Pitágoras es el descubrimiento, que le humilló y desoló, de que los números naturales comunes 1, 2, 3,... son insuficientes para la construcción de la Matemática, hasta en la forma rudimentaria en que él la conocía. Ante este capital descubrimiento predicó, como un profeta, que toda la naturaleza, el Universo entero, físico-metafísico, mental, moral, matemático, todas las cosas están construidas según la norma discontinua de los números naturales 1, 2, 3,... y sólo es interpretable en función de estos ladrillos proporcionados por Dios. Dios, declaraba Pitágoras, es en efecto *"número"*, y por número quería referirse al número natural común. Sin duda se trata de una sublime concesión, bella y simple, pero tan inabordable como su eco en Platón - *"Hasta Dios geometriza"*, o en Jacobi: *"Hasta Dios aritmetiza"*, o en Jeans: *"El gran Arquitecto del Universo comienza ahora a aparecer como un matemático".* Una obstinada discrepancia matemática demolió la filosofía, la matemática y la metafísica de Pitágoras. Pero, a diferencia de algunos de sus sucesores, aceptó finalmente la derrota después de haber luchado en vano para anular el descubrimiento que había abolido su credo.

He aquí lo que había derrumbado su teoría: es imposible encontrar dos números enteros tales que el cuadrado de uno de ellos sea igual al doble del cuadrado del otro. Esto puede ser probado por un simple razonamiento que está al alcance de cualquiera que haya estudiado unas pocas semanas de Álgebra, o hasta por cualquiera que comprenda la Aritmética elemental. En realidad Pitágoras encontró su tropiezo en Geometría: la razón entre el lado de un cuadrado y una de sus diagonales no puede ser expresada como razón de dos números enteros cualesquiera. Este juicio es equivalente al anterior referente a los cuadrados de los números enteros. En otra forma podemos decir que la raíz cuadrada de 2 es irracional[5], o sea, no es igual a un número entero o fracción decimal exacta o suma

[5] Para los griegos inconmensurables. Ver también Nota 14.

de los dos, obtenida dividiendo un número entero por otro; un concepto geométrico tan simple como el de la diagonal de un cuadrado desafía a los números naturales 1, 2, 3,... y niega la primitiva filosofía pitagórica. Podemos construir fácilmente la diagonal geométrica, pero no podemos medirla con un número finito de pasos. Esta imposibilidad da lugar claramente a los números irracionales y a los procesos infinitos que atraen la atención de los matemáticos. Así, la raíz cuadrada de 2 puede ser calculada con cualquier número finito dado de cifras decimales por el proceso enseñado en la escuela o por métodos más importantes, pero las cifras decimales jamás "se repiten periódicamente" (como por ejemplo ocurre para 1/7) En este descubrimiento Pitágoras encontró el fundamento del moderno Análisis Matemático.

Los resultados obtenidos por este simple problema no fueron admitidos de un modo satisfactorio por todos los matemáticos. Nos referimos a los conceptos matemáticos del infinito (lo innumerable), límites y continuidad, conceptos que están en la raíz del Análisis moderno. Tiempo tras tiempo las paradojas y sofismas que se deslizan en la Matemática con estos conceptos al parecer indispensables han sido considerados y finalmente eliminados, y sólo reaparecen una generación o dos más tarde, cambiados aunque siempre los mismos. Los encontramos más vivos que nunca en la Matemática de nuestro tiempo. Los razonamientos siguientes constituyen una descripción extraordinariamente simple e intuitiva de la situación.

Consideremos una línea recta de diez centímetros de largo y supongamos que ha sido trazada por el "movimiento" "continuo" de un -"punto". Las palabras entre comillas son las que ocultan las dificultades. Sin analizarlas podemos fácilmente persuadirnos de que describimos lo que ellas significan. Ahora escribamos en el extremo izquierdo de la línea la cifra 0 y en el extremo derecho el número 2.

A mitad del camino entre 0 y 2 escribiremos 1; a la mitad entre 0 y 1 escribiremos 1/2; a la mitad entre 0 y 1/2 escribiremos 1/4, y así sucesivamente. De modo análogo entre 1 y 2 escribiremos 1 1/2 y entre 1 1/2 y 2, 1 1/4, y así sucesivamente. Una vez hecho esto procederemos del mismo modo y escribiremos

1/3, 2/3, 1 1/3, 1 2/3, y entonces descompondremos cada uno de los segmentos resultantes en segmentos iguales más pequeños. Finalmente "en la imaginación" podemos concebir que este proceso se realiza para todas las fracciones comunes y números mixtos comunes que son mayores que 0 y menores que 2; los puntos de división conceptual nos dan todos los números racionales entre 0 y 2. Se trata de un número infinito de puntos. ¿Llegarán a "cubrir" completamente la línea? No. ¿A qué punto corresponde la raíz cuadrada de 2? A ningún punto, pues esta raíz cuadrada no se obtiene dividiendo un número cualquiera entero por otro. Pero la raíz cuadrada de 2 es sin duda un "número" de algún tipo; su punto representativo se encuentra entre 1,41 y 1,42 y nosotros podemos colocarlo tan aproximado como nos plazca. Para cubrir la línea completamente con puntos nos veremos forzados a imaginar o a inventar infinitamente más "números" que los racionales. Es decir, aceptamos que la línea es continua, y postulamos que cada punto de ella corresponde a un uno y solamente a un "número real". El mismo tipo de suposición puede ser llevado a todo un plano y aun más allá, pero esto basta por el momento[6].

Problemas tan sencillos como éstos pueden conducir a serias dificultades. Con respecto a estas dificultades, los griegos estaban divididos, como nosotros lo estamos, en dos grupos irreconciliables. Uno se detenía en su ruta matemática y rechazaba marchar hacia el Análisis: el Cálculo Integral en el cual nosotros nos detendremos aunque sea brevemente; el otro intentaba vencer las dificultades y conseguía convencerse a sí mismo de que así lo hacía. Aquellos que se detenían, aunque cometían pocos fracasos, eran comparativamente estériles para la verdad no menos que para el error; aquellos que necesitaban descubrir muchas cosas del más alto interés para la Matemática y el pensamiento racional en general, dejaban algunas veces, abierta la crítica destructiva, precisamente como ha sucedido en nuestra propia generación. Desde los primitivos tiempos nos encontramos con estos dos tipos mentales diferentes y antagónicos: los cautelosos que justifican quedarse atrás debido a que la tierra tiembla bajo sus pies, y los más audaces precursores que saltan el abismo para encontrar tesoros y seguridad relativa en el otro lado. Estudiaremos primeramente algunos de aquellos que se negaban a saltar. Para

[6] Utilizando la moderna teoría de la Medida, diremos que $m([0,1]_Q)=0$ y que $m([0,1]_I)=1$, o sea, los números racionales prácticamente están aislados y los irracionales "cubren" todo el segmento.

hallar un pensamiento tan penetrante y sutil que lo iguale tenemos que llegar hasta el siglo XX y encontrar a Brouwer.

Capítulo 2
Las paradojas de Zenón.

Zenón de Elea[7], actualmente Velia en Lucania, Italia Meridional (ver Mapa 1), amigo del filósofo Parménides, cuando visitó Atenas con su protector dejó sorprendidos a

[7] Múltiples detalles sobre la vida y obra de Zenón de Elea pueden ser consultados en Aristóteles-"Física", VI,9 (v. t. VI,2; V111,8); Vellin-"lnfini et quantité", París 1880, 63-97; G. Frontera-"Études sur les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement", París 1891; Revue de Métaphisique et de Morale, 1893, n°1 (autores varios, sobre cada uno de los problemas de Zenón de Elea); V. Brochard-"Études de philosophie ancienne et de philosophie moderne", París 1912, 3-22; H. STADIE-"Die logischen Kostitl(entien des sogenannten Zenonischen Problems", Gotinga 1924; G. Calogero-"La Logica del secondo eleatismo", Atenas-Roma 1936; H. D. P. Lee-"Zeno of Elea", Cambridge 1936; R. Mondolfo-"La polemica di Zenone contro il moto. La negazione de/lo spazio in Zenone", Bolonia 1936; I. Zafiropulo-"Vox Zenonis", París. 1958; H. Bergson-"Oeuvres", París 1959, 74-77 (Essai sur les données immédiates de la conscience, cap. II) y 755-760 (L'évolution créatrice, cap. IV); M. Schramm- "Die Bedeutung der Bewegunslehre des Aristoteles für seine beiden Losungen der zenonischen Paradoxie", 1962; A. Grunbam-"Modern science and Zeno's paradoxes", Middletown (Conn.) 1967; v. t. la de Escuela de ELEA, y la de los PRESOCRÁTICOS. B. Misra and E. C. G. Sudarshan-"The Zeno's paradox in quantum theory", Journal of Mathematical Physics, Vol. 18, No. 4, April 1977; Paul Feyerabend-"Wider dem Methodenzwang", Frankfurt am Main, 1999, Suhrkamp. Andrew Hamilton-"The Quantum Zeno Effekt," http://cordes.phys.dal.ca/Classes/3140/proiects/aaihamilton/: Wolfgang Hübner-"Die Begriffe "Astrologie" und "Astronomie" in der Antike, Wortgeschichte und Wissenschaftssystematik mit einer Hypothese zum Terminus "Quadrivium"", Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Mainz, Abhandlungen der Geistes- und Sozialwissenschaftlichen Klasse, Jahrgang 1989, Nr. 7.-Die Dodekatropos des Manilius, Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Mainz, Abhandlungen der Geistes- und Sozialwissenschaftlichen Klasse, Jahrgang 1995, Nr. 6. Immanuel Kant-"Werke in sechs Banden", Bd. II, Kritik des reinen Vernunft, Wiesbaden, Insel Verlag, 1956, S. 71-83; P. Kwiat, H. Weinfurter und A. Zeilinger-"Wechselwirkungsfreie Quantenmessung", Spektrum der Wissenschaft, Januar 1997; Philosophen Lexikon, Von den Vorsokratikern bis zu den neuen Philosophen, Stuttgart, 1995, Metzler Verlag; Bertrand Russel-"Philosophie des Abendlandes, Ihr Zusammenhang mit der politschen und der sozialen Entwicklung", Wien, 1983, Europa Verlag; History of Western Philosophy, and its Connection with Political and Social Circumstances from the Earliest Times to the Present Day, London, 1955, George Allen and Unwin Ltd.; Paul Valéry-"Cahiers", Paris, 1973, Bd. 1, S. 510; R. E. Allen and D. J. Furley (eds.)-"Studies in Presocratic Philosophy" (2 Vols.) (London, 1975); J. Barnes-"The Presocratic Philosophers" (London, 1979); R. Ferber-"Zenons Paradoxien der Bewegung und die Struktur von Raum und Zeit", 2. durchgesehene und um ein Nachwort erweiterte Auflage (Stuttgart, l995); A. Grunbaum-"Modern Science and Zeno's Paradoxes" (London, 1968); W. K. C. Guthrie-"A History of Greek Philosophy" (Vol. 2) (Cambridge, 1962); T. L. Heath-"A history of Greek mathematics" 1 (Oxford, 1931); G. S. Kirk, J. E. Raven and M. Schofield-"The Presocratic Philosophers" (Cambridge, 1983); V. Ya. Komarova-"The teachings of Zeno of Elea: An attempt to reconstruct a system of arguments" (Russian) (Leningrad, 1988); Diogenes Laertius-"Lives of eminent philosophers" (New York, 1925); H. D. P. Lee-"Zeno of Elea. A text with Translation and Commentary" (Cambridge, 1936); B. Russell-"The Principles of Mathematics" I (1903); W. C. Salmon-"Zeno's Paradoxes" (Indianapolis, IN, 1970); R Sorabji-"Time, Creation and the Continuum" (London, 1983); I. Toth-"I paradossi di Zenone nel 'Parmenide' di Platone", Momenti e Problemi della Storia del Pensiero 7 (Naples, 1994); H. Barreau-"La physique du continu chez Aristote, sa réponse á Zénon", in Le labyrinthe du continu (Paris, 1992), 3-15; F. Cajori-"The history of Zeno's arguments on motion", Amer. Math. Monthly 22 (1915), 1-6; 77-82; 109-115; 143-149; 179-186; 215-220; 253-258; R. Ferber-"Zenon von Elea und das Leib-Seele-Problem", Allgemeine Zeitschrift für Philosophie 23 (l998), 231-246; H. Frankel-"Zeno of Elea's attacks on plurality", Amer. J. Philology 63 (1942), 1-25; 193-206; A. Joja-"Les origines de la logique en Gréce". II. Parménide et Zénon, An. Univ. Bucuresti Ser. Acta Logica 10 (1967), 559; C. V. Jones-"Zeno's paradoxes and the first foundations of mathematics" (Spanish), Mathesis. Mathesis 3 (1) (1987), 3-14; C. W. Kilmister-"Zeno, Aristotle, Weyl and Shuard: two-and-a-half millenia of worries over number", Math. Gaz. 64 (429) (1980), 149-158; J. Lear-"A note on Zeno's arrow", Phronesis 26 (1981), 91-104; S. Makin-"Zeno of Elea", Routledge Encyclopedia of Philosophy 9 (London, 1998), 843-853; G. E. L. Owen-"Zeno and the mathematicians", Proc. Aristotelian Soc. 58 (1957), 199-222; A. Tomasini Bassols- "Aporias, antinomies and the infinite: Russell's critique of Zeno and Kant", Mathesis. Mathesis 6 (3) (1990), 307-326; I. Toth-"Le probléme de la mesure dans la perspective de l'etre et du non-etre. Zénon et Platon, Eudoxe et Dedekind: une généalogie philosophico- mathématique", in Mathématiques et philosophie de l'antiquité á l'âge classique (Paris, 1991), 21-99; I. Toth-"Aristote et les paradoxes de Zénon d'éléé", Eleutheria (2) (1979), 304-309; P. Urbani-"Zeno's paradoxes and mathematics: a bibliographic contribution" (Italian), Arch. Internat. Hist. Sci. 39 (123) (1989), 201-209; B. L. van der Waerden-"Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", Math. Ann. 117 (1940), 141-161; G. Vlastos-"A note on Zeno's arrow", Phronesis 11 (1966), 3-18; G. Vlastos-"Zeno's race course", J. Hist. Philos. 4 (1966), 95-108; J. Vuillemin-"Sur deux cas d'application de l'axiomatique á la philosophie: l'analyse du mouvement par Zénon d'Elée et l'analyse de la liberté par Diodore Kronos", Fund. Sci. 6 (3) (1985), 209-219; M. Zangari-

los filósofos inventando cuatro inocentes paradojas que no podían resolver con palabras. Se dice que Zenón fue un campesino autodidacto. Sin intentar resolver cuál fue su propósito al inventar sus paradojas se han mantenido opiniones diferentes nos limitaremos a mencionarlas.

Zenon de Elea fue un filósofo griego nacido en Elea, perteneciente a la escuela eleática (c. 490-430 a. C.). Fue discípulo directo de Parménides de Elea y se le recuerda por el amplio arsenal conceptual con que defendió las tesis de su maestro.

Teniéndolas presentes resulta evidente que Zenón, hubiera podido objetar nuestra división "infinitamente continuada" de la línea de diez centímetros, descrita antes. Así se deduce de las dos primeras de sus paradojas. La Dicotomía y el argumento Aquiles y la Tortuga. Las dos últimas, sin embargo, muestran que hubiera podido objetar con la misma vehemencia la hipótesis opuesta, la de que la línea no es "divisible infinitamente" y que se compone de una serie separada de puntos que pueden ser numerados 1, 2, 3,... Las cuatro en su conjunto constituyen un círculo de hierro más allá del cual el progreso parece imposible.

Primero, *la Dicotomía.* El movimiento es imposible, debido a que siempre que se mueve debe alcanzar la mitad de su curso antes de que alcance el final; pero antes de haber alcanzado la mitad debe haber alcanzado la cuarta parte y así sucesivamente de modo indefinido. De aquí que el movimiento nunca pueda iniciarse.

Segundo, el argumento *Aquiles.* Aquiles corriendo tras una tortuga que se halla delante de él jamás puede alcanzarla, pues primero debe llegar al lugar desde el cual la tortuga ha partido; cuando Aquiles llega a ese sitio la tortuga ya no está allí

"Zeno, zero and indeterminate forms: Instants in the logic of motion", Australasian Journal of Philosophy 72 (1994), 187-204.

y siempre marcha adelante. Repitiendo el argumento podemos fácilmente ver que la tortuga siempre estará delante[8].

Mapa 1

Ahora examinemos las opuestas.

Tercera, *la flecha.* Una flecha que se mueve en un instante dado está en reposo o no está en reposo, es decir, se mueve. Si el instante es indivisible, la flecha no puede moverse, pues si lo hace el instante quedaría dividido inmediatamente. Pero el tiempo está constituido de instantes. Como la flecha no puede moverse en ningún instante, no podrá en ningún momento. De aquí que siempre permanecerá en reposo.

Cuarta, el *Stadium.* "Para demostrar que la mitad del tiempo puede ser igual al doble del tiempo consideraremos tres filas de cuerpos una de las cuales, (A) está en reposo, mientras que las otras dos, *(B)* y (C), se mueven con igual velocidad en sentidos opuestos.

[8] Recomendamos el sitio http://www.lamaquinadeltiempo.com/Kafka/borgeskafka.htm para una historia de Borges respecto de esta aporía.

En el momento en que todas están en la misma parte del curso (B), habrá sobrepasado doble números de cuerpos en (*C*) que en (*A*) Por lo tanto el tiempo que ha empleado para pasar (*A*) es doble que el tiempo que ha empleado para pasar (*C*) Pero el tiempo que (*B*) y (*C*) han empleado para alcanzar la posición (*A*) es el mismo. Por tanto el doble del tiempo es igual a la mitad del tiempo" (traducción de Burnet) Es útil imaginar (*A*) como una valla de estacas.

Primera posición

(A)	0	0	0	0
(B)	0	0	0	0
(C)	0	0	0	0

Segunda posición

(A)		0	0	0	0		
(B)	0	0	0	0			
(C)			0	0	0	0	

Estas son, en lenguaje no matemático, la serie de dificultades que encontraron los primeros que se ocuparon de la continuidad y el infinito. En los libros escritos hace 30 años se dice que "la teoría positiva del infinito" creada por Cantor, y la teoría de los números "irracionales", como la raíz cuadrada de 2, inventada por Eudoxio, Weierstrass y Dedekind, han disipado todas estas dificultades para siempre. Esa afirmación no podía ser aceptada por todas las escuelas del pensamiento matemático. Así, al detenernos en Zenón nos hemos, en efecto, discutido a nosotros mismos. Quienes deseen saber algo más respecto a esos problemas pueden consultar el Parménides de Platón. Necesitamos tan sólo hacer notar que Zenón finalmente perdió su cabeza por traición o algún acto semejante. Poco es lo que relativamente hicieron para el progreso de la Matemática los sucesores de Zenón, aunque al menos intentaron hacer temblar sus fundamentos.

Eudoxio (408-355 a.C.), de Cnido, heredó el legado que hizo Zenón al mundo y no mucho más. Como muchos de los hombres que se han dedicado a la Matemática, Eudoxio sufrió de extrema pobreza en su juventud. Platón estaba en sus años mozos cuando vivía Eudoxio y Aristóteles tenía alrededor de los 30 años cuándo Eudoxio murió. Tanto Platón como Aristóteles, los filósofos principales de la antigüedad, estaban influidos por las dudas que Zenón había inyectado en el razonamiento matemático y que Eudoxio, en su teoría de las proporciones - "la corona de la Matemática griega"-, suavizó hasta la última cuarta parte del siglo XIX.

Siendo joven, Eudoxio se trasladó a Atenas desde Tarento, donde había estudiado con Archytas (428-347 a.C.), un excelente matemático, administrador y soldado. Llegado a Atenas, Eudoxio pronto encontró a Platón. Como era demasiado pobre para vivir cerca de la academia, Eudoxio venía desde el Pireo, donde el pescado, el aceite de oliva y el alojamiento eran baratos. Aunque Platón no era un matemático en el sentido técnico, fue llamado "el hacedor de la Matemática" y no puede negarse que cuando estaba irritado hacía Matemáticas infinitamente mejores que cuando quería crear verdaderas Matemáticas. Como veremos, su notable influencia para el desarrollo de la Matemática fue probablemente perniciosa. Pero rápidamente reconoció lo que era Eudoxio y fue su amigo devoto hasta que comenzó a sentir celos por su brillante protegido. Se dice que Platón y Eudoxio hicieron juntos un viaje a Egipto. De ser así, parece que Eudoxio fue menos crédulo que su predecesor Pitágoras. Platón, sin embargo, muestra los efectos de haber incorporado buena parte del misticismo de los números, propio del Oriente. La Academia fundada por Platón tuvo una muy marcada influencia en la cultura helénica. Aunque Eudoxio aceptó el principio platónico de la perfección, y con ello las órbitas planetarias circulares, no pudo menos que darse cuenta de que las trayectorias observadas no concordaban con esas curvas perfectas. En el modelo de Eudoxio, el movimiento de los cuerpos celestes se representaba mediante un conjunto de esferas: la correspondiente a un planeta tenía sus polos sobre otra esfera, que a su vez descansaba sobre otra de ellas y así sucesivamente. El astrónomo griego pensaba en 27 esferas, pues cada planeta requería de cuatro de ellas. Así explicaba las posiciones aparentes de los astros, aunque no los cambios de brillantez de los planetas, que interpretaba correctamente como producidos por sus diferentes distancias de la Tierra.

Encontrándose poco popular en Atenas, Eudoxio se estableció y enseñó en Cycico, donde transcurrieron sus últimos años. Estudió medicina y se dice que fue un médico práctico y un legislador por encima de su Matemática. Como si todo esto no fuera suficiente, realizó un serio estudio de Astronomía, a la cual enriqueció con notables contribuciones. En su construcción científica se encontraba varios siglos adelante de sus verbalizantes y filosofantes contemporáneos. Como Galileo y Newton, tenía un gran desprecio por las especulaciones acerca del Universo físico que no podían ser comprobadas por la observación y la experiencia. Si marchando hasta el Sol, decía, pudiera decirse cuál es su forma, tamaño y naturaleza, podría correrse gustosamente el destino de Faetón, pero mientras tanto no hay necesidad de establecer conjeturas. Alguna idea de lo que Eudoxio hizo puede obtenerse partiendo de un sencillo problema. Para encontrar el área de un rectángulo multiplicamos el largo por el ancho. Aunque esto nos parece fácil presenta graves dificultades, a no ser que ambos lados sean medibles por números racionales. Pasando por alto esta particular dificultad, la vemos en una forma más evidente en el siguiente tipo más sencillo de problema, el de hallar la longitud de una línea curva, o el área de una superficie curva, o el volumen encerrado por superficies curvas.

Quien desee comprobar su capacidad matemática, debe intentar descubrir un método para demostrar estas cosas. Supuesto que jamás lo haya visto hacer en la escuela, ¿cómo procederá para dar una prueba rigurosa de la fórmula de la longitud de una circunferencia que tenga un determinado radio? Siempre que por su propia iniciativa lo haga, puede pretender ser considerado como un matemático de primera categoría. En el momento en que se pasa de las figuras limitadas por líneas rectas o superficies planas caemos en los problemas de la continuidad, los enigmas del infinito y los laberintos de los números irracionales. Eudoxio ideó el primer método lógicamente satisfactorio que Euclides reprodujo en el Libro V de sus Elementos. En su método de exhaución aplicado al cálculo de áreas y volúmenes, Eudoxio demostró que no necesitamos aceptar la "existencia" de "cantidades infinitamente pequeñas". Para los fines de un matemático es suficiente poder llegar a una cantidad tan pequeña como queramos por la división continuada de una cierta cantidad.

Para terminar cuanto se refiere a Eudoxio mencionaremos su definición, que marca una época, de las razones iguales que capacitan a los matemáticos para tratar los números irracionales tan rigurosamente tomó los racionales. Este fue esencialmente el punto de partida de la moderna teoría de los irracionales.

"Se dice que la primera de cuatro cantidades tiene la misma razón respecto de la segunda como tiene la tercera respecto de la cuarta, cuando, siempre que consideremos equimúltiples (iguales múltiplos) de la primera y la tercera, y cualquier otro equimúltiplo de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual a, o menor que el múltiplo de la segunda, cuando el múltiplo de la tercera es mayor, igual, o menor que el múltiplo de la cuarta".

Después de 1600 años sólo Apolonio merece ser citado entre los griegos cuya obra haya influido sobre la Matemática. Apolonio (260?-200? a.C.) se dedicó a la Geometría en la forma de Euclides, esa forma que es aún enseñada a los pobres principiantes, llevándola más allá del estado en que Euclides (330?-275? a.C.) la dejó. Como geómetra de este tipo, geómetra "puro", sintético, Apolonio no tiene par hasta que se llega a Steiner en el siglo XIX.

Si un cono de base circular y que se extiende indefinidamente en ambas direcciones más allá de su vértice se corta por un plano, la curva que el plano determina en la superficie del cono se denomina sección cónica.

Existen cinco tipos posibles de secciones cónicas: la elipse; la hipérbola, que tiene dos ramas; la parábola, el camino de un proyectil en el vacío; la circunferencia; y un par de líneas curvas que se cortan. La elipse, la parábola y la hipérbola son "curvas mecánicas", según la fórmula platónica; es decir, estas curvas no pueden ser construidas por el solo uso de la regla y el compás, aunque sea fácil, con estos instrumentos, construir cualquier número de puntos sobre cualquiera de estas curvas. La geometría de las secciones cónicas fue llevada a un alto grado de perfección por Apolonio y sus sucesores, y pudo verse, en los siglos XVII y siguientes, que tenían máxima importancia en la mecánica celeste.

En efecto, si no hubiera sido por los geómetras griegos es poco probable que Newton hubiera llegado a su ley de la gravitación universal, para la cual Kepler preparó el camino con sus laboriosos e ingeniosos cálculos de las órbitas de los planetas.

Entre los últimos griegos y árabes de la Edad Media, Arquímedes parece haber inspirado la misma devoción y reverencia que Gauss despertó entre sus contemporáneos y continuadores en el siglo XIX y Newton en los siglos XVII y

XVIII. Arquímedes fue el indiscutido jefe de todos ellos, "el anciano", "el más sabio", "el maestro", "el gran geómetra". Arquímedes vivió entre los años 287-212 a.C. Gracias a Plutarco se sabe más de su muerte que de su vida y quizá no sea erróneo decir que para Plutarco, el biógrafo histórico típico, el rey de la Matemática es un personaje histórico menos importante que el soldado romano Marcelo. Sin embargo, Marcelo debe su recuerdo a Arquímedes, y a la par que su recuerdo, su execración. En la muerte de Arquímedes encontramos el primer golpe de una civilización groseramente práctica sobre lo más sublime que pudo destruir Roma, habiendo casi demolido Cartago, orgullosa de sus victorias, cayó con su púrpura imperial sobre Grecia para derribar su delicada fragilidad.

Arquímedes, aristócrata en cuerpo y alma, hijo del astrónomo Fidias, había nacido en Siracusa, Sicilia, y se dice que era pariente de Hierón II, tirano (o rey) de Siracusa. De todos modos se hallaba en excelentes relaciones con Hierón y su hijo Gelón, quienes tenían por el rey de la Matemática gran admiración. Su temperamento esencialmente aristocrático se manifiesta en su posición por lo que actualmente se denomina ciencia aplicada. Aunque fue uno de los más grandes genios de la Mecánica[9], si no el más grande, el aristócrata Arquímedes tenía una sincera repugnancia por sus invenciones prácticas. Desde cierto punto de vista estaba justificado. Muchos libros podrían escribirse acerca de lo que Arquímedes hizo en la mecánica aplicada, pero, por grande que fuera esta obra, queda ensombrecida por su contribución a la Matemática pura. Estudiaremos en primer término los pocos hechos conocidos acerca de él y la leyenda de su personalidad. Según la tradición, Arquímedes es el tipo perfecto del gran matemático que el pueblo concibe. Igual que Newton y

[9] Recomendamos consultar J. E. Nápoles-"El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideraciones (auto)críticas", Boletín de Matemáticas, (1998), 53-79 y J. E. Nápoles y C. Negrón-"La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto", Xixim, Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática, 2002, Año 3, Nº 2, 33-57 (http://www.uaq.mx/matemáticas/redm/) para una discusión más precisa de este término.

Hamilton, se olvidaba de comer cuando estaba ensimismado en la Matemática. En su falta de atención por el vestido ha sobrepasado a Newton, pues cuando hizo su descubrimiento fundamental de que un cuerpo que flota pierde de peso una cantidad igual a la del líquido que desaloja, salió del baño, en el cual había hecho el descubrimiento al observar su propio cuerpo flotante, y corrió por las calles de Siracusa, completamente desnudo, gritando: "Eureka, eureka" (lo encontré, lo encontré) Lo que había encontrado era la primera ley de la hidrostática. Refiere la historia que un orfebre había adulterado el oro de una corona para Herón mezclándolo con plata, y el tirano, al sospechar el engaño, había planteado a Arquímedes el problema. Cualquier estudiante sabe cómo se resuelve, mediante un simple experimento, y algunas fáciles cuentas aritméticas, basadas en el peso específico. El principio de Arquímedes y sus numerosas aplicaciones prácticas son muy conocidos actualmente, pero el hombre que primeramente pudo formularlo tenía bastante más que sentido común. En realidad no se sabe si el orfebre fue culpable, pero de ordinario se supone que lo era.

Otra exclamación de Arquímedes que se ha conservado a través de los siglos es *"dadme un punto de apoyo y moveré el mundo".* La frase podía ser un perfecto lema para un Instituto científico moderno y parece extraño que no haya sido utilizada. Existe otra versión en mejor griego pero su significación es la misma.

En una de sus excentricidades Arquímedes se parecía a otro gran matemático, Weierstrass. Según una hermana de este último, no se podía confiar en él cuando tenía un lápiz en la mano y ante su vista se hallaba un trozo de pared blanco o un puño de la camisa limpio. Arquímedes batió este record en sus días, pues el suelo arenoso o la tierra lisa endurecida servían de "pizarra". Arquímedes, cuando se sentaba ante el fuego, sacaba las cenizas y dibujaba en ellas. Al salir del baño, cuando se untaba con aceite de olivas, según la costumbre de la época, en lugar de vestirse se perdía en sus dibujos que trazaba con una uña sobre su propia piel afeitada. Arquímedes fue una especie de águila solitaria. Siendo joven había estudiado breve tiempo en Alejandría, Egipto, donde contrajo dos amistades íntimas, Conon, un matemático de talento por quien Arquímedes tenía un alto concepto personal e intelectual, y Eratóstenes, también buen matemático, aunque un completo petimetre. Estos dos, particularmente Conon, parece que fueron los únicos hombres a quienes Arquímedes participó sus pensamientos, seguro de ser comprendido. Algunos de sus trabajos más complicados fueron comunicados por cartas a Conon. Más tarde, cuando Conon murió, Arquímedes mantuvo correspondencia con Dositeo, un discípulo de Conon.

Haciendo abstracción de sus grandes contribuciones a la Astronomía y a las invenciones mecánicas, expondremos un simple e incompleto resumen de las principales contribuciones que Arquímedes hizo a la Matemática pura y aplicada. Inventó métodos generales para encontrar las áreas de figuras planas curvilíneas y los volúmenes limitados por superficies curvas, y aplicó estos métodos a muchos casos especiales, incluyendo el círculo, la esfera, segmentos de una parábola, el área limitada entre dos radios y dos pasos sucesivos de una espiral, segmentos de esfera y segmentos de superficies engendradas por la revolución de rectángulos (cilindros), triángulos (conos), parábolas (paraboloides), hipérbolas (hiperboloides) y elipses (esferoides), alrededor de sus ejes principales. Ideó un método para calcular π (la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro), y fijó el valor de π entre 3 1/7 y 3 10/71; también encontró métodos para hallar las raíces cuadradas aproximadas, lo que muestra que se anticipó a la invención hecha por los hindúes, respecto a las fracciones continuas periódicas. En Aritmética sobrepasó extraordinariamente la incapacidad del método no científico griego de simbolizar los números al escribir o grandes números, e inventó un sistema de numeración capaz de tratar números tan grandes como se deseara. En Mecánica estableció algunos de los postulados fundamentales, descubrió las leyes de la palanca, y aplicó sus principios mecánicos para calcular las áreas y centros de gravedad de diversas superficies planas y sólidos de diversas formas. Creó toda la ciencia de la hidrostática, y la aplicó para encontrar las posiciones de reposo y de equilibrio de cuerpos flotantes de diversos tipos.

A Arquímedes se debe, no sólo una obra maestra, sino muchas. ¿Cómo pudo hacerlo? Sus exposiciones lógicas no permiten intuir el método de que se valió para llegar a sus maravillosos resultados. Pero en 1906, J. L. Heiberg, el historiador y estudioso de la Matemática griega, hizo en Constantinopla el notable descubrimiento de un tratado hasta entonces "perdido" de Arquímedes, dirigido a su amigo Eratóstenes: Sobre teoremas mecánicos, método. En él, Arquímedes explica cómo pesando, en la imaginación, una figura o sólido cuya área o volumen sea desconocida frente a una conocida se llega al conocimiento del hecho buscado; conocido el hecho, era relativamente fácil para él demostrarlo matemáticamente. Brevemente, utilizó su mecánica para hacer avanzar la Matemática. Este es uno de sus títulos para ser considerado como una mente moderna: lo utilizó todo, y todas las cosas que sugirió fueron un arma para abordar sus problemas.

Para un hombre moderno todo es sencillo en la guerra, en el amor y en la Matemática; para muchos de los antiguos la Matemática era un juego embrutecedor que había que jugar según las reglas impuestas por Platón, cuya estructura mental era filosófica. Según Platón únicamente debían ser permitidas las reglas y un par de compases como instrumentos de construcción en Geometría. No hay que admirarse de que los geómetras clásicos se golpearan las cabezas durante siglos frente a los "tres problemas de la antigüedad": la trisección de un ángulo; construir un cubo de doble volumen que otro dado; construir un cuadrado igual a un círculo. *Ninguno de esos problemas es posible hacerlo utilizando únicamente regla y compás;* aunque es difícil demostrar que el tercero no lo es, y su imposibilidad fue finalmente demostrada en 1882. Todas las construcciones efectuadas con otros instrumentos eran denominadas mecánicas, y como tal, por alguna razón mística conocida únicamente por Platón y su Dios geometrizante, eran consideradas vulgares, y tabú para una Geometría respetable. Tan sólo cuando Descartes, 1985 años después de la muerte de Platón, publicó su Geometría analítica, pudo escapar la Geometría de su rigidez platónica. Platón murió 60 años o más antes de que Arquímedes naciera, de modo que no puede ser censurado, por no apreciar la potencia y libertad de los métodos de Arquímedes. Por otra parte, Arquímedes merece sólo alabanzas al no respetar esa concepción rígidamente encorsetada que Platón tenía de la musa de la Geometría.

El segundo requisito de Arquímedes para ser considerado moderno se basa también sobre sus métodos. Anticipándose a Newton y Leibniz en más de 2000 años inventó el Cálculo Integral, y en uno de sus problemas anticipó la creación del Cálculo Diferencial[10]. Estos dos cálculos juntos constituyen lo que se denomina el "cálculo

[10] En realidad debemos tener cuidado con estas expresiones, recordemos que la teoría de límites tuvo que esperar hasta el Siglo XIX con Cauchy para su fundamentación rigurosa, así que es poco probable que técnicamente sea aceptable.

infinitesimal” o sencillamente Calculus, considerado como el instrumento más poderoso que se ha inventado para la exploración matemática del universo físico. Para citar un solo ejemplo, supongamos que queremos encontrar el área de un círculo. Entre otras formas de hacer esto podemos dividir el círculo en cierto número de bandas paralelas de igual anchura, reducir los extremos curvados de las bandas, de modo que los fragmentos desechados sean lo menor posible, y luego sumar las áreas de todos los rectángulos resultantes.

Esto nos da una aproximación del área buscada. Aumentando el número de bandas indefinidamente y tomando el límite de la suma, encontraremos el área del círculo.

Este proceso (toscamente descrito) de tomar el límite de la suma se llama integración; el método de realizar tales sumas se denomina Cálculo Integral. Este cálculo fue el que Arquímedes utilizó para encontrar el área de un segmento de parábola y para otras cuestiones.

El problema en que utilizó el Cálculo Diferencial fue el de la construcción de una tangente en un punto dado de la espiral creada por él.

Si el ángulo que forma la tangente con cualquier línea dada es conocido, puede trazarse fácilmente, pues es una simple construcción trazar una línea recta por un punto dado paralela a una determinada línea recta. El problema de encontrar dicho ángulo (para cualquier curva, no simplemente para la espiral) es, en lenguaje geométrico, el problema principal del Cálculo Diferencial. Arquímedes resolvió este problema para su espiral. Espiral es la curva descrita por un punto que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una línea recta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de un punto fijo de, la línea.

La vida de Arquímedes era tan tranquila como debe ser la de un matemático que ha hecho lo que él hizo. Toda la acción y tragedia de su vida quedan coronadas en su muerte. En el año 212 a.C. estalló la segunda guerra púnica. Roma y Cartago estaban en guerra, y Siracusa, la ciudad de Arquímedes, tentadoramente situada cerca del camino de la flota romana. ¿Porqué no ponerle sitio?, y los romanos así lo hicieron. Orgulloso de sí mismo *("descansando sobre su propia gran fama"*, como dijo Plutarco), y confiando en el esplendor de su "preparación" más que en los cerebros, el jefe romano, Marcelo, estaba seguro de una rápida conquista. El orgullo de su confiado corazón era .una primitiva pieza de artillería colocada sobre una elevada plataforma mantenida por ocho galeras reunidas. Considerando su fama, esperaba 'que los tímidos ciudadanos pusieran en sus manos la llave de la ciudad. Herón no lo hizo así. Estaba bien preparado para la guerra y de una manera que el práctico Marcelo no podía soñar.

Parece que Arquímedes, aunque despreciaba la Matemática aplicada, tuvo que ceder, en tiempo de paz, a las inoportunidades de Herón, y pudo demostrarle, con satisfacción del tirano, que la Matemática puede ser, si es necesario, prácticamente devastadora. Para convencer a su amigo de que la Matemática es capaz de algo más que de deducciones abstractas, Arquímedes aplicó sus leyes de las palancas y poleas para mover un barco totalmente cargado que él mismo pudo botar con una sola mano.

Recordando esta hazaña, Herón, al ver acercarse las nubes de la guerra, solicitó a Arquímedes que preparara una adecuada bienvenida a Marcelo. Abandonando una vez más sus investigaciones para complacer a su amigo, Arquímedes preparó por sí solo un Comité de recepción que pudiera dar una sorpresa a los precipitados romanos. Cuando llegaron, sus ingeniosas diabluras estaban dispuestas para darles un buen saludo.

El aparato en forma de arpa apoyado sobre las ocho galeras no duró más que la fama del orgulloso Marcelo. Piedras, cada una de las cuales pesaba más de un cuarto de tonelada, salían de las súper catapultas de Arquímedes demoliéndolo todo. Picos y garras de hierro se alzaban sobre los muros para asir a los barcos que se acercaban, y volcándolos los arrastraban hacia la arena o los arrojaban contra las escolleras. Las fuerzas terrestres, movidas también por los aparatos de Arquímedes, no les dieron mejor acogida. Ocultando su derrota en los boletines oficiales, y considerándola como una retirada hacia una nueva posición anteriormente preparada, Marcelo conferenció con sus ayudantes. Incapaz de preparar a sus amotinadas tropas para un asalto a las terribles murallas, el famoso romano se retiró.

Bastaba cierto sentido militar para que Marcelo no incluyera en las órdenes del día "ataques contra la muralla"; abandonando todos los pensamientos de un ataque central capturó Megara en la retaguardia y finamente se dirigió hacia Siracusa. Esta vez la suerte le acompañó. Los necios habitantes de Siracusa se entregaban a una fiesta religiosa en honor de Artemisa. La guerra y la religión siempre han dado lugar a un bilioso coctel; sorprendidos en la fiesta, Marcelo hizo una carnicería.

La primera noticia que tuvo Arquímedes de que la ciudad había sido tomada fue la sombra de un soldado romano que se proyectaba sobre sus dibujos en la arena. Un relato dice que el soldado, al pisar los dibujos, dio lugar a que Arquímedes exclamara excitadamente: *"No borres mis círculos".* Otros afirman que Arquímedes se negó a obedece la orden de un soldado, para que le acompañara a presencia de Marcelo, hasta que hubiera resuelto su problema. De todos modos lo cierto es que el irritado soldado desenvainó su glorioso sable y dio muerte al inerme geómetra que a la sazón tenía 70 años. Así murió Arquímedes.

Con razón, dice Whitehead: *"Ningún romano ha perdido su vida por estar absorbido en la contemplación de una figura matemática".*

Capítulo 3
Paradojas de la geometría euclidiana[11]

La importancia de la contribución de Euclides a la Geometría y al pensamiento humano no se discute. El modelo de organización deductiva que él estableció da la forma según la cual se calculan casi todas las Matemáticas actuales.

Probablemente ningún otro libro -excepto la Biblia- haya contado con mayor número de ediciones o haya contribuido más a la vida intelectual de todo el mundo que los *"Elementos"* de Euclides. Por más de dos mil años, la gente instruida en todos los terrenos -políticos, soldados, teólogos, estudiantes y filósofos- lo han considerado el epítome de la exactitud, y su estudio la mejor manera de adquirir destreza en el razonamiento lógico. Pero hubiera sido verdaderamente notable que el enorme incremento del conocimiento matemático, desde los tiempos de Euclides, no hubiera revelado fallas y puntos débiles en su trabajo, como así ha sucedido.

En primer lugar, en vez de comenzar con unos pocos conceptos indefinidos, cuyo significado debería provenir de los axiomas, Euclides intentó erróneamente definir cada término que usaba, lo cual lo llevó inevitablemente a algunas "definiciones" poco satisfactorias. Por ejemplo, define los términos "punto" y "recta" de esta manera:

- *Punto es aquello que no tiene parte.*
- *Línea recta es una longitud sin espesor.*

y para "ángulo", Euclides da esta definición:

- *Ángulo plano es la inclinación que tienen entre sí dos rectas de un plano que se encuentran y que no están en una misma recta.*

Sin embargo, debemos reconocer que estas definiciones responden, en cierto modo, a nuestras ideas intuitivas de "punto", "recta" y "ángulo", aunque forman un círculo vicioso por cuanto sus significados dependen de otros términos tales como "parte" e "inclinación".

[11] Recomendamos A. S. Posamentier-"Excursions in Advanced Euclidean Geometry", Addison-Wesley Publishing Co., 1984 y C. R. Wylie, Jr.-"Fundamentos de Geometría", Ediciones Troquel, Buenos Aires, 1968.

Sin embargo, más serio es el hecho de que, pese a ser tan cuidadoso, Euclides dio por sentado y utilizó una cantidad de propiedades que no incluyó entre sus axiomas y que no pueden ser deducidas de ellos. Por ejemplo: la primera proposición de Euclides es la construcción de un triángulo equilátero dada la base, y la realizó trazando arcos de radio adecuado, con centros en los extremos del segmento base, de manera tal que los arcos se cortan determinando un punto que da el vértice opuesto al lado dado, como indica la Figura 1a.

Pero no intentó demostrar y no hubiera podido hacerlo solamente a partir de sus axiomas, que los arcos se cortan. El axioma de las paralelas asegura que, bajo ciertas condiciones, dos rectas se cortan, pero ninguno de los axiomas trata las condiciones por las cuales dos circunferencias se cortan.

Podría suponerse que los puntos de un arco estuvieran espaciados como las cuentas de un rosario, siendo entonces posible que uno de los arcos se "deslizara" a través del otro sin que tuvieran un punto común (Fig. 1b). Naturalmente, como Euclides mismo aceptó, parece que dos arcos de circunferencia, como se ve en la Fig. 1a, se cortan realmente en un punto, pero solamente un axioma o un teorema anterior pueden justificar esta conclusión. Problemas de este tipo pertenecen a consideraciones de continuidad, y son uno de los tópicos de la Geometría Euclidiana cuyo tratamiento debe ser mejorado.

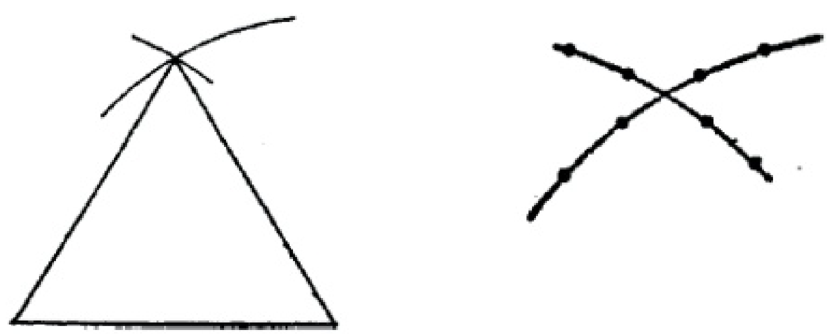


Figura 1

(a) (b)

Euclides procedió también vagamente al tratar las relaciones de orden. Por ejemplo, el concepto de “estar entre” parece haberle resultado tan natural y familiar que, aparentemente, no sintió necesidad de estudiar sus propiedades en forma axiomática. Como resultado, a veces le fue imposible establecer con certeza la ubicación de un punto respecto de los otros, lo cual dio lugar a una cantidad de paradojas, que presentamos bajo el título de teoremas.

Teorema 1

Todos los triángulos son isósceles. (!) “Demostración”. Sea Δ ABC un triángulo cualquiera. Trazamos la bisectriz del <BAC y la mediatriz del lado PC, y sea O la intersección de ambas.

Llamamos A', B' y C' a los pies de las perpendiculares de O a los lados BC, CA y AB respectivamente, siendo A' también, por construcción, el punto medio del lado BC (ver Fig. 2).

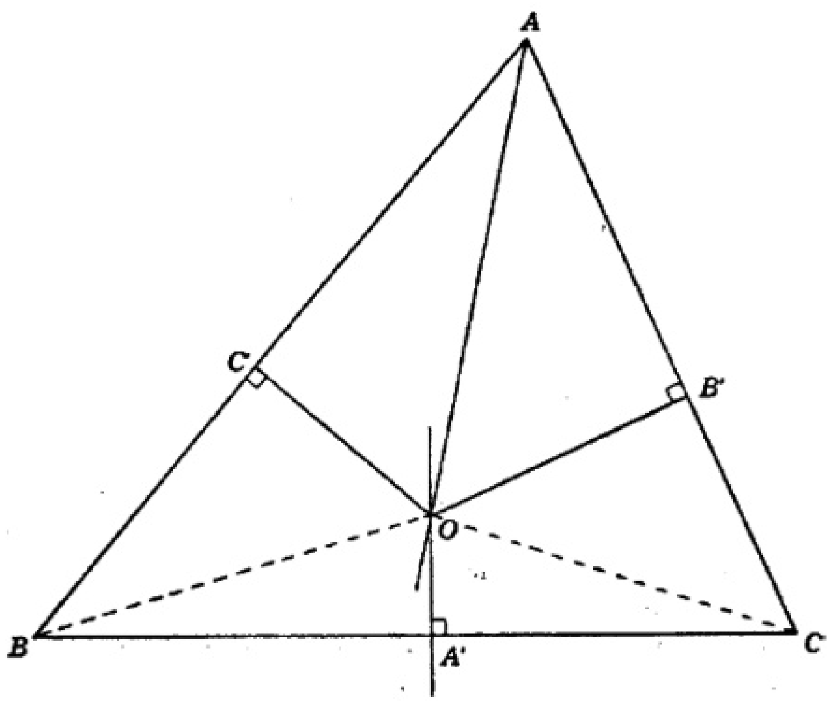


Fig. 2

Luego:

1. A'O = A'0	1. Identidad
2. BA' = A'C	2. Construcción
3. ∠OA'B = ∠OA'C	3. Ambos rectos
4. ΔOA'B≅ΔOA'C	4. L, A, L
5. OB = OC	5. Elementos correspondientes de triángulos congruentes
6. AO = AO	6. Identidad
7. ∠C'AO = ∠B'AO	7. AO bisectriz de ∠BAC
8. ∠AC'O = ∠AB'O	8. Ambos rectos
9. ΔAC'B ≅ ΔAB'O	9. A, L, A
10. AC' = AB'	10. Elementos correspondientes de Δ congruentes
11. OC' = OB'	11. Elementos correspondientes de Δ correspondientes
12. ∠OC'B = ∠OB'C	12. Ambos rectos
13. OB = OC	13. Relación 5
14. ΔOC'B ≅ ΔOB'C	14. Ángulo recto, hipotenusa, cateto
15. C'B = B'C	15. Elementos correspondientes de triángulos congruentes
16. AB = AC' + C'B	16. C' entre A y B
17. AB = AB' + B'C	17. Relaciones 10 y 15
18. AC = AB' + B'C	18. B' entre A y C
19. AB = AC	19. Relaciones 17 y 18.
	Q.E.D.(!)

La falacia está en la posición del punto O, el cual, en una figura hecha cuidadosamente, se encuentra fuera, más que dentro, del DABC y se colocará de tal manera que uno de los puntos B' o C' estará entre dos vértices del triángulo, mientras que el otro no lo estará.

Sin embargo, esto, en realidad, no soluciona el problema, porque en una ciencia lógicamente íntegra cualquier cosa que es verdadera debe ser demostrable solamente a partir de sus axiomas sin recurrir a argumentos inductivos, tales como la inspección de una figura. A decir verdad, es imposible determinar a partir de los axiomas de Euclides si el punto O está dentro o fuera del triángulo. Aún más, es imposible, usando los mismos, dar una definición de interior o exterior de un triángulo.

Es evidente que, en un desarrollo esmerado de la Geometría Euclidiana, debe prestarse mayor atención a las relaciones de orden de lo que se hace habitualmente.

Aunque el mayor defecto en el desarrollo tradicional de la Geometría Euclidiana sea el tratamiento (o falta de tratamiento) de los conceptos de continuidad y orden, hay varios otros untos que también deben ser analizados detalladamente. En particular, los conceptos de distancia y de ángulo se introducen, generalmente, sin una adecuada fundamentación axiomática, y a la noción tan importante de congruencia se la hace depender de la de superposición, que, a su vez implica ideas de movimiento e invariancia.

Mediante nuevos axiomas -que hagan explícitas las ideas intuitivas que Euclides no formalizó- y definiciones más precisas, intentaremos dar una fundamentación sobre la cual puedan construirse demostraciones más aceptables de los teoremas conocidos de la Geometría. Para ello seguiremos, en cada oportunidad, la práctica cada vez más común de combinar las geometrías plana y del espacio. Este procedimiento hace posible cierta economía y pone en evidencia la semejanza, más que la diferencia, entre los dos sistemas.

Teorema 2

Todo punto interior de una circunferencia está sobre la circunferencia. (!)

"Demostración". Sea O el centro de una circunferencia arbitraria de radio r, *P* cualquier punto interior y *Q* el punto en la recta *OP*, del mismo lado que P respecto de O, tal que

$$(OP)\ (OQ) = r^2.$$

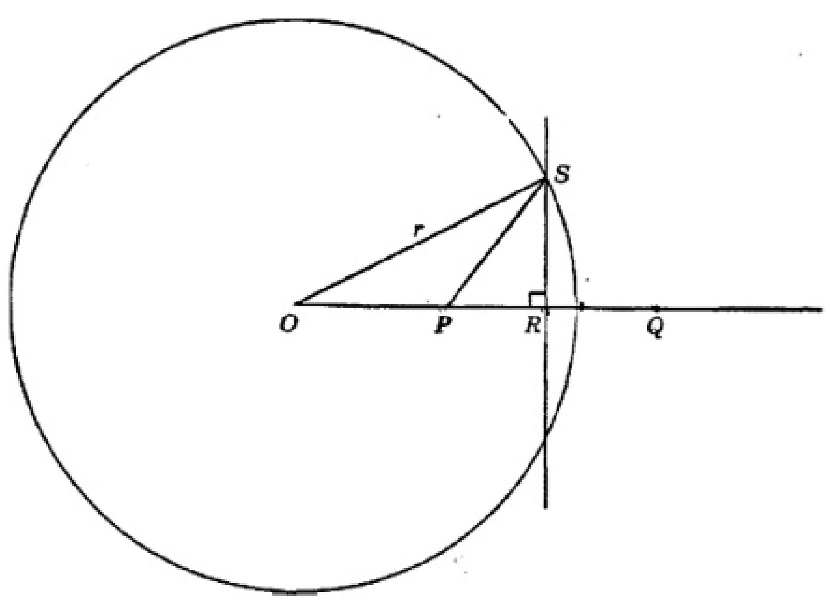


Fig. 3

Evidentemente, dado que *OP es* menor que *r*, debe ser OQ mayor que r y, en consecuencia, P está entre O y Q. Sea *R* el punto medio del segmento PQ, y S uno de los puntos en que la mediatriz de PQ corta a la circunferencia. (Fig. 3).

1. $OP = OR – PR$	1. P está entre O y R
2. $OQ = OR+ RQ$	2. R está entre O y Q
3. $OQ = OR+ PR$	3. R es el punto medio dePQ
4. $(OP)(OQ) = (OR - PR)(OR + PR) = (OA)^2 -(PR)^2$.	4. Sustitución.
5. $(OR)^2 = (0S)^2 - (SR)^2$.	5. Teorema de Pítágoras
6. $(PR)^2 = (PS)^2 - (SR)^2$.	6. Teorema de Pitágoras
7. $(OP)(OQ) = [(0S)^2 - (SR)^2] - [(PS)^2 - (SR)^2] = (0S)^2 - (PS)^2 = r^2 - (PS)^2$.	7. Sustitución en la relación 4 por 5 y 6
8. $r^2 = r^2 - (PS)^2$.	8. Q. situado tal que $(OP)(OQ)=r^2$.
9. P está en la circunferencia.	9. Por la relación 8, la distancia de P a S es cero; luego P y S son un mismo punto.

Q.E.D.(!)

Teorema 3

Todo ángulo obtuso es un ángulo recto (!).

"Demostración". Sea *ZDAE* un ángulo obtuso, *B* y C puntos que están del mismo lado que *E* respecto de *AD* y tales que *AB = AE,* y *ABCD* un rectángulo. Sean las mediatrices de *AD* y *CE tales* que se corten en el punto O (Fig. 4).

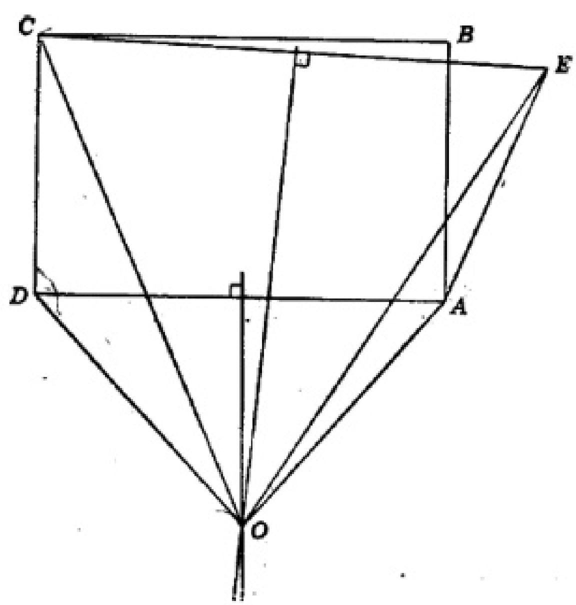


Fig. 4

1. AE = AB = DC	1. B y C situados tal que ABCD es un rectángulo en el cual es AB = AE
2. EO = CO	2. está en la mediatriz de CE
3. AO = DO	3. está en la mediatriz de AD
4. $\Delta AEO \cong \Delta DCO$	4. L, L, L
5. $\angle OAE = \angle ODC$	5. Elementos correspondientes de triángulos congruentes
6. $\angle OAE' = \angle OAD + \angle DAE$	6. El total es igual a la suma de sus partes.
7. $\angle ODC = \angle ODA + \angle ADC$	7. El total es igual a la suma de sus partes
8. $\angle OAD + \angle DAE = \angle ODA + \angle ADC$	8. Sustitución en la relación 5 por 6 y 7
9. $\angle OAD = \angle ODA$	9. está en la mediatriz de DA
10. $\angle DAE = \angle ADC$	10. Relaciones 8 y 9
11. $\angle DAS$ es recto	11. Es igual al $\angle ADC$ que es un ángulo recto

Q.E.D.(!)

Capitulo 4
Paradojas aritméticas

A lo largo de la Historia de la Matemática, cuando los matemáticos han buscado la suma de series infinitas, en ocasiones han considerado que dichas sumas infinitas tienen las mismas propiedades que las sumas finitas. Es claro que esto los ha llevado a dificultades. Por ejemplo, consideremos

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots .$$

Si agrupamos los términos como

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

tendremos

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Pero si agrupamos de otra manera, obtenemos

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

Si bien en ocasiones esto funciona, en este caso es erróneo. La práctica de agrupar términos, lo cual siempre es válido en sumas finitas, no siempre puede ser usado para sumas con infinitos términos. Posiblemente el ejemplo paradigmático es la suma de la serie de los recíprocos de los cuadrados, que Euler manejó con propiedades finitas, extrapolando resultados para ecuaciones cuadráticas y dando lugar a lo que se llamó posteriormente *Inducción Euleriana*[12].

[12] Ver J. E. Nápoles-"La resolución de problemas en la escuela: algunas reflexiones", Taller III Simposio de Educación Matemática, Universidad Nacional de Luján-Chivilcoy, 1 al 4 de mayo de 2001, para una exposición más detallada del procedimiento de Euler y las observaciones de Abel al respecto de las series divergentes.

El sistema de los números complejos, denotado por C, es el conjunto $\mathbf{R}^2$ dotado de las reglas usuales de adición de vectores y multiplicación por un escalar y con la multiplicación de números complejos definida como

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

No obstante, encontramos más conveniente retomar la notación standard

$$(a, b) = a + bi$$

donde

$$i=\sqrt{-1} = (0, 1), \text{ ó}$$
$$i^2=-1$$

Note que

$$i^2=i * i=(0,1)(0,1)=(0.0-1.1,1.0+0.1)=(-1,0)=-1$$

o sea, la referida propiedad $i^2=-1$.
Por otra parte tenemos

$$-1 = i^2 = i * i = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = \sqrt{[(-1)*(-1)]} = \sqrt{1}=1$$

De donde

$$-1 = 1$$

lo que es una contradicción, ¿dónde está el error?, la operación de multiplicación de números complejos

$$\sqrt{-1} * \sqrt{-1} = \sqrt{[(-1)*(-1)]}$$

es falsa.

Sabemos que en la definición de división, la división por cero está excluida pues no existe el inverso del cero en la multiplicación. Esto puede explicarse como sigue. Asumamos que existe un número real c tal

$$a / b = c$$

Esta es una consideración “legal” puesto que la división es definida en término de la multiplicación y esta es una operación cerrada. Si multiplicamos ambos miembros de la anterior ecuación por b, obtenemos

$$a = bc$$

El cero puede aparecer en un problema de división como este de tres maneras $a = 0$, $b = 0$ o ambos, a y b, son iguales a cero. Supongamos $b = 0$, $a \neq 0$, entonces $a / 0 = c$, lo que significa que $a = 0 * c$. Así, c debe ser un número que multiplicado por 0 nos arroje a (recordemos que $a \neq 0$). Sabemos que sumar 0 cualquier cantidad de veces es igual a 0. Por tanto, no obtenemos ningún otro número real que 0 cuando multiplicamos por 0. De aquí que la división por cero no tiene respuesta y el número c buscado no existe.
Supongamos ahora $a = b = 0$, entonces $0/0 = c$ o lo que es lo mismo $0=0 * c$. Esto podemos interpretarlo diciendo que debemos buscar un c que multiplicado por 0 nos de 0, pero el valor de c es inmaterial, pues cualquier número real multiplicado por 0 es 0. En otras palabras, c puede ser cualquier número real, es decir, el problema 0/0 tiene infinitas respuestas. Esta es una situación poco deseada, así dejaremos afuera estos dos casos pues producen resultados insatisfactorios. Ambos envuelven la división por cero.
Sea $a = b$, entonces tenemos

$$a^2 = a * b$$

$$a^2 - b^2 = a * b - b^2$$

$$(a + b) * (a - b) = b(a - b)$$

$$(a + b) = b$$

$$a + a = a$$

$$2a = 1$$

$$2 = 1$$

Por tanto, 1 = 2, 2 = 4,... es decir, todos los números naturales pares son iguales a su "mitad”, lo cual es claramente una contradicción. El problema está aquí en la división por cero a - b, pues a - b = 0. Este caso es falso, luego la división o multiplicación por 0 es falsa, o sea, la división o multiplicación por 0 es indefinida.

Variantes del caso tratado son las siguientes:

¿2 + 2 = 5?

Sea a = 2 y b = 3.

$$a^2 - a^2 = 0$$

$$(a + b) - (a + b) = 0$$

$$(a + b)a - (a + b)a = 0$$

$$a^2 - a^2 = (a + b)a - (a + b)a$$

$$(a + a)(a - a) = (a + b)(a - a)$$

$$(a + a) = (a + b)$$

$$2 + 2 = 2 + 3$$

$$2 + 2 = 5$$

En general puede presentarse, como $2a = a + b$, diciendo que cualquier número par es igual a otro número, no necesariamente entero pues depende de b.

¿n + 1 = n?

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - 2n+1 = n^2$$

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) - n(2n + 1) = n^2 - n(2n + 1)$$

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) = n^2 - n(2n + 1)$$

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + (2n + 1)2/4 = n^2 - n(2n + 1) + (2n + 1)2/4$$

$$[(n + 1) - (2n + 1)/2]^2 = [n - (2n + 1)/2]^2$$

$$(n + 1) - (2n + 1)/2 = n - (2n + 1)/2$$

$$n + 1 = n$$

El Problema del Peso

Tres visitantes pagan una comida de 30 pesos aportando la misma cantidad, sin embargo, hubo un error de cálculo y solo costaba 25, así que le fueron devueltos 5 pesos, uno de ellos entregó un peso a sus amigos y él mismo tomó uno, los dos restantes, después de consultar con una mirada a sus compañeros, los entregó como propina al sirviente.

En ese momento, uno de los amigos exclamó:

Con este asunto del pago de los treinta pesos, nos hemos armado un lío *mayúsculo. ¿Un lío?,* preguntó otro. *No lo veo...*

Te lo mostraré, replicó el primero, *Cada uno de nosotros pagó en realidad solo 9 pesos, o sea, 27 en total. Sumando a estos 27, los dos que dimos de propina, tenemos 29. ¿Dónde está el otro peso?*

¿2 > 3?

Sea a = 1/4 y b = 1/8, como a > b, log a>log b pues f(x) = log x es una función creciente, de aquí que

$$\text{Log}\ ((½)^2) > \text{Log}\ ((½)^3)$$

y por tanto

$$2 \log (½) > 3 \log (½)$$

de donde tenemos finalmente 2>3. Recomendamos las paradojas que envuelven logaritmos para una respuesta adecuada a esta situación.

Capítulo 5
Paradojas en la teoría de conjuntos

Para saber lo que debemos entender por "conjunto" hojeemos las obras de los matemáticos que son, a título diverso, teóricos de los conjuntos. Según el artículo de la *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (tomo I, vol. 1, f. 4) redactada por M. Baire, según el artículo alemán de A. Schonflies, *la palabra conjunto, a causa precisamente de su simplicidad y generalidad, no parece susceptible de una definición precisa; todo lo más, se puede reemplazar por sinónimos tales como colección,...* punto de vista que es mantenido por Borel en sus *"Lecons sur la théorie des fonctions"*.

Estos teóricos de los conjuntos se clasifican entre los matemáticos *empiristas* (o realistas), por oposición a los idealistas.

La noción de conjunto puede obtenerse por medio del denominado *axioma de comprensión*.

También puede conservarse la noción intuitiva de conjunto tal y como lo han considerado A. Schonflies, Borel, Sierpinski y otros.

El axioma de comprensión puede expresarse del siguiente modo:

1. Los conjuntos son entidades matemáticas que tienen una cierta propiedad en común, la definición de la cual determina si un cierto ente es o no, elemento de un conjunto.
2. Los conjuntos son entes matemáticos y por ende, ellos pueden ser elementos de un conjunto.
3. Los conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos; por lo tanto, un conjunto está unívocamente determinado por sus elementos.

Este axioma permite que se puedan introducir las nociones de conjunto vacío, subconjunto, potencia de un conjunto, etc. y las operaciones con conjuntos.

Sabemos cómo la moderna teoría de conjuntos está indisolublemente ligada a los problemas de la fundamentación de la aritmética de los números reales y la demostración de los teoremas fundamentales del Análisis y de la teoría de las series trigonométricas. En todos estos problemas era necesario distinguir distintos conjuntos de puntos, de estructura singulares, para los cuales era necesario hallar un principio de clasificación único. Antecedentes a estos resultados, pueden encontrarse en diversas épocas. En la antigüedad, Proclo Diadocos señaló la siguiente paradoja: el círculo se divide mediante el diámetro en dos partes iguales. El número infinitamente grande de diámetros posibles corresponde entonces quasi una cantidad doblemente infinita de semicírculos.

Un ejemplo particularmente bello del tratamiento de lo infinito-actual, puede apreciarse en los *"Discorsi"* de Galileo (1638); según la terminología actual él estableció una asociación biunívoca entre los números naturales y sus cuadrados y señaló al respecto que el conjunto de los números naturales y sus cuadrados, y señaló al respecto que el conjunto de los números naturales es "equivalente" a uno de sus subconjuntos verdaderos (ahora equipotentes).

Antes que George Cantor (1845-1918), fue Bolzano el que más avanzó por la vía de la verdadera teoría de conjuntos. En su obra póstuma *"Paradojas de lo infinito"* (1851), cuya importancia exaltó particularmente Cantor, Bolzano avanzó hacia un claro conocimiento del concepto "equipotencia" y de los diferentes rangos del infinito.

La discutida *"Mengenlehre"* (Teoría de Conjunto, creada en 1874-1895 por Cantor, puede muy bien ser considerada, por su orden cronológico, como la conclusión de toda la historia. Este tema es un ejemplo, en la Matemática, del colapso general de aquellos principios que los profetas del siglo XIX, previendo todas las cosas, pero no el gran cataclismo, creyeron que constituían los fundamentos de todas las cosas desde la ciencia física a los gobiernos democráticos.

Si "colapso" es quizá una palabra demasiado fuerte para describir la transformación del mundo que está teniendo lugar, de todos modos es cierto que la evolución de las ideas científicas se está produciendo ahora tan vertiginosamente que no puede distinguirse la evolución de la revolución.

Sin los errores del pasado, como un foco de perturbación profundo, la presente revolución en la ciencia física quizá no hubiera sucedido; pero atribuir a nuestros predecesores toda la inspiración que mueve a nuestra propia generación es concederles más de lo debido. Este punto es digno de consideración, pues algunos han estado tentados de decir que la "revolución" correspondiente en el pensamiento matemático, cuya iniciación ahora se aprecia claramente, es simplemente un eco de Zenón y de otros hombres presos de la duda en la antigua Grecia.

Las dificultades de Pitágoras acerca de la raíz cuadrada de 2 y las paradojas de Zenón sobre la continuidad (o "divisibilidad infinita") son, por lo que sabemos, los orígenes de nuestro actual cisma matemático. Los matemáticos actuales que prestan cierta atención a la filosofía (o fundamentos) de su disciplina se descomponen al menos en dos bandos, que al parecer no podrán reconciliarse, sobre la validez del razonamiento utilizado en el Análisis matemático, y este desacuerdo se remonta a través de los siglos hasta la Edad Media, y de aquí a la Antigua Grecia. Todas las facetas han tenido sus representantes en todas las épocas del pensamiento matemático, sea que tal pensamiento haya sido disfrazado por las paradojas, como en el caso de Zenón, o por sutilezas lógicas, como en el caso de los más amargados lógicos de la Edad Media. La raíz de estas diferencias es considerada comúnmente por los matemáticos como una cuestión de temperamento: cualquier intento de convertir a un analista como Weierstrass en el escepticismo de un hombre como Kronecker es tan vano como intentar convertir a un fundamentalista cristiano en un ateo rabioso. Algunos datos concernientes a esta disputa suelen servir como estimulante, o sedante, según los gustos, para nuestro entusiasmo acerca de la singular carrera intelectual de Georg Cantor, cuya "teoría positiva del infinito" dio lugar en nuestra propia generación, a la más fiera batalla de ranas y ratones (como Einstein la llamó una vez) en la historia acerca de la validez del razonamiento matemático tradicional.

En 1831 Gauss expresó su "horror al infinito real" del siguiente modo:

> *"Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemática. Infinito es simplemente una forma de hablar, y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción".*

Por tanto, si x es un número real, la fracción 1/x disminuye a medida que x aumenta, y podremos encontrar un valor de x tal que 1/x difiera de cero en menos de una cantidad dada (que no es cero) que puede ser tan pequeña como nos plazca, y cuando x continúa aumentando, la diferencia permanece menor que esta cantidad dada; el *límite* de 1/x "cuando x tiende a infinito" es cero. El símbolo del infinito es ∞; la afirmación 1/∞ = 0 carece de sentido por dos razones: "la división por infinito" es una operación *indefinida*, y, por tanto, no tiene significación; la segunda razón fue enunciada por Gauss. De modo análogo 1/0 = ∞ carece de significación. Cantor está de acuerdo y en desacuerdo con Gauss. Escribiendo en 1886 sobre el problema del infinito actual, (lo que Gauss llamó completo), Cantor dice que

> *"a pesar de la diferencia esencial entre los conceptos del "infinito" potencial y actual, el primero significa una magnitud finita variable, que aumenta más allá de todos los límites finitos (como x en 1/ x antes mencionado), mientras el último es una magnitud constante, fija., más allá de todas las magnitudes finitas, y ambos son con frecuencia confundidos".*

Cantor sigue diciendo que el abuso del infinito en Matemática ha inspirado con razón un horror al infinito entre los matemáticos concienzudos de su época, precisamente como ocurría con Gauss. De todos modos, Cantor mantiene que la "repulsa falta de crítica del legítimo infinito actual es una violación de la naturaleza de las cosas (cualquiera pueda ser, no parece que ha sido revelada a la, humanidad como un todo), que deben ser tomadas como son. Cantor, se alinea así definitivamente con los grandes teólogos de la Edad Media, de los cuales era un ardiente admirador y un profundo conocedor.

Las certidumbres absolutas y las soluciones completas de los viejos problemas siempre pasan mejor si se sazonan bien antes de tragarlos. He aquí lo que Bertrand Russell dijo en 1901 acerca del estudio del infinito, propio de Prometeo, realizado por Cantor:

> *"Zenón se refería a tres problemas... Tratábase del problema de lo infinitesimal, de lo infinito y de la continuidad... Desde su época a la nuestra, los mejores talentos de cada generación han atacado a su vez estos problemas, pero, hablando en términos generales, no han logrado nada .... Weierstrass, Dedekind y Cantor... los han resuelto completamente. Sus soluciones... son tan claras que no dejan lugar a la menor duda. Esta conquista es probablemente la más importante de que la época puede jactarse... El problema de lo infinitesimal fue resuelto por Weierstrass, la*

solución de los otros dos fue comenzada por Dedekind y definitivamente acabada por Cantor".

El entusiasmo de sus párrafos nos contagia actualmente, aunque sabemos que Russell en la segunda edición (1924) de su obra, y A. N. Whitehead en sus *Principia Matemática*, admiten que no todo va bien con la cortadura de Dedekind, que es la columna vertebral del Análisis. Tampoco marcha bien actualmente. Más se ha dicho en pro o en contra de un credo particular en la ciencia de la Matemática durante una década que lo que fue realizado en un siglo durante la Antigüedad, en la Edad Media o el Renacimiento. Muchos más hombres de talento abordan actualmente los problemas científicos matemáticos sobresalientes que los que lo hicieron anteriormente, y la finalidad ha venido a ser la propiedad privada de los fundamentalistas. Ninguna de las finalidades de las observaciones de Russell de 1901 han sobrevivido. Hace un cuarto de siglo, aquellos que eran incapaces de ver la gran luz que los profetas aseguraban estaba iluminado como el sol del medio día en un firmamento de la media noche eran llamados simplemente estúpidos. En la actualidad para cada partidario competente del bando de los profetas existe un partidario igualmente competente frente a él. Si la estupidez existe en alguna parte está tan uniformemente distribuida que ha cesado de ser un carácter distintivo. Hemos entrado en una nueva era, tina era de humildad, llena de dudas.

En el lado de los dudosos encontramos por esa misma época (1905) a Poincaré.

"He hablado... de nuestra necesidad a volver continuamente a los primeros albores de nuestra ciencia, y de las ventajas de esto para el estudio de la mente humana. Esta necesidad ha inspirado dos empresas que han adquirido un lugar muy importante en el desarrollo más reciente de la Matemática. La primera es el cantorismo... Cantor introdujo en la ciencia una nueva forma de considerar el infinito matemático... pero ha ocurrido que hemos encontrado ciertas paradojas, ciertas aparentes contradicciones, que hubieran hecho las delicias de Zenón de Elea y de la Escuela de Megara. Así, cada uno debe buscar el remedio. Por mi parte, y no estoy solo, pienso que lo importante es no introducir jamás entidades no completamente definibles por un número finito de palabras. Siempre que se adopte el cuidado necesario, podemos

> *prometernos el goce que siente el médico llamado a tratar un interesante caso patológico".*

Pocos años más tarde el interés de Poincaré por la patología disminuyó algo. En el Congreso Matemático Internacional de 1908, celebrado el Roma, el saciado médico pronunció su pronóstico: *"las generaciones posteriores considerarán la Mengenlehre como una enfermedad de la cual nos hemos restablecido".*

Corresponde a Cantor el gran mérito de haber descubierto, a pesar de sí mismo y contra sus propios deseos, que el "cuerpo matemático" está profundamente enfermo y que la enfermedad con que Zenón la infectó no ha encontrado aún alivio. Su perturbador hallazgo es un hecho curioso dé su propia vida intelectual. Examinaremos primeramente los acontecimientos de su existencia material, no de mucho interés por sí mismos, pero que quizá sean singularmente aclaratorios para los aspectos ulteriores de su teoría.

Merece destacarse que Cantor partió de problemas matemáticos concretos. Mucho más tarde, cuando con su teoría de conjuntos tropezó con mucha falta de comprensión, fue que él llegó a argumentaciones filosóficas -más bien idealistas objetivas- y ocasionalmente metafísicas e incluso teológicas, en favor del infinito actual.

Desde su época de estudiante en Berlín con Weierstrass, Cantor se familiarizó con la concepción estricta acerca de los fundamentos del análisis. Posteriormente, en Halle, su colega Heine llamó su atención acerca de algunas interrogantes difíciles de la teoría de las series trigonométricas; esto lo condujo a la teoría de los conjuntos de puntos. En los inicios de la actividad matemática de Cantor se ubica también la fundamentación de la teoría de los números irracionales mediante sucesiones fundamentales. A partir de 1873 Cantor penetró paso a paso en los secretos del infinito actual, o como él dice, de lo "verdaderamente infinito". Cantor expresó con las palabras siguientes la diferencia, decisiva para la teoría de conjuntos, entre lo infinito potencial y lo infinito actual (1886):

> *"Si se quiere conocer el origen del prejuicio muy difundido en contra del infinito actual, el "horror infiniti", en la matemática, hay que centrar la atención ante todo en la oposición que existe entre el infinito potencial y el*

actual. Mientras que el infinito potencial no significa otra cosa que una magnitud indeterminada, variable, que siempre permanece dentro de lo finito, que tiene que asumir valores que o bien son menores que todo límite finito más pequeño o mayores que que todo límite finito mayor, lo infinito actual se refiere siempre a un cuanto fijo, constante, que es mayor que toda magnitud finita del mismo tipo."

Consideremos las siguientes sucesiones 1, 2,..., n,... y 2, 4,..., 2n,... el número de términos de ambas sucesiones es infinito. Observamos que a todo número de la primera sucesión se puede hacer corresponder un número de la segunda, es así que al 1 le corresponde el 2, al 2 el 4, y así sucesivamente, a n se le puede hacer corresponder 2n. Análoga idea se puede presentar de la segunda sucesión con respecto a la primera.

Se concibe, de una parte, que hay "tantos" números en la primera sucesión como en la segunda, en la medida en que esta afirmación tiene sentido, puesto que no se trata de conjuntos finitos. Se observa, de otra parte, que los números pares no son otra cosa que una parte de los números enteros, la "mitad" si se quiere, lo que contradice la afirmación precedente. Contradicciones que hay que superar para permitir el desarrollo de la matemática.

¿De dónde vienen estas contradicciones?. Manifiestamente del hecho que admitimos implícitamente para los conjuntos infinitos, el axioma *El todo es más que la parte*, que se verifica para conjuntos finitos.

Para superar esta contradicción tendremos que introducir, en primer término, la noción de número infinito, como una generalización de la noción de entero definida para conjuntos finitos de objetos. Es necesario ahora definir una aritmética para estos números, lo que completaría la formalización de estos "nuevos" números. Es a G. Cantor a quien corresponde el mérito de la definición de igualdad de dos conjuntos infinitos.

Dos conjuntos infinitos corresponden al mismo número infinito (mejor aún, el número cardinal *transfinito* se define como caracterizando un conjunto, independientemente del orden y de la naturaleza de sus elementos), o se dice que tienen la misma *potencia*, cuando se puede hacer corresponder a un elemento cualquiera del primero un elemento del segundo y, viceversa, a un elemento cualquiera del segundo un elemento del primero.

Se dice que se ha realizado una *correspondencia biunívoca* entre los elementos de los dos conjuntos. Dos conjuntos finitos que tienen la misma potencia tienen el mismo número entero de elementos y recíprocamente. Esta definición comprende bien la definición de igualdad de los números enteros como caso particular.

Todo conjunto que tiene la misma potencia que el conjunto de los enteros positivos (los naturales) se llama *numerable*. Los teóricos de los conjuntos representan esta potencia por la letra hebrea *álef*, que afectan del índice cero. Así un conjunto numerable unido a otro conjunto numerable hacen un conjunto numerable y no dos.

Tomemos todos los números reales comprendidos entre 0 y 1. Es conocido que este conjunto es no numerable, no existe, pues, correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento (0, 1) y los naturales. De otro lado: toda parte infinita de un conjunto numerable es numerable y, por consiguiente, igual a todo el conjunto. En conjuntos infinitos admitiremos incluso que una parte infinita de un conjunto infinito puede ser más pequeña que todo el conjunto infinito, es decir, que existen conjunto infinitos con distintas potencias.

Sea el continuo la potencia de los números comprendidos entre 0 y 1. Una parte de este conjunto, por ejemplo, los racionales, son numerables, sin embargo, ninguna parte de estos racionales, puede tener la potencia del continuo. Así pues, $c > X_0$.

Observemos que si se plantea $y = x/(1 + x)$, se hace corresponder a todo x comprendido entre 0 y $+\infty$ un y comprendido entre 0 y 1 y recíprocamente. El conjunto de los números reales positivos tiene la misma potencia que el conjunto de los reales del (0,1). Resulta de esta observación que $c + c = c$, o aún, $c \times X_0 = c$.

Cantor demostró además que la potencia de los números trascendentes -los no algebraicos- es la misma que la del continuo, con lo cual quedaba claro que números como p y e son de los más comunes entre los números reales. Cualquier número algebraico diferente de 0 y 1 elevado a una potencia de irracional es ya un número trascendente (Kuzmin, 1930).

El 15 de enero de 1874 Cantor se hace la pregunta ¿Tiene el conjunto de puntos del plano la misma potencia que el conjunto de puntos de una recta, es decir, se puede coordinar de forma biunívoca una superficie y una línea?.

"Pregunta absurda", declaran inmediatamente los matemáticos de Berlín, puesto que se sobreentiende que dos variables independientes no pueden dejarse conducir a una. Cantor responde a esta observación demostrando que hay tantos puntos en un plano como en una recta, anulando la antigua concepción de "dimensión", más aún cuando el resultado de Cantor podía ampliarse a dimensiones arbitrarias *("Je le vois, mais je ne le crois pas"*, escribe a Dedekind).

Muy pronto pasó Cantor a la exposición y representación coherente de sus resultados. De 1879 a 1884 se publicaron seis trabajos en las Mathematishe Annalen bajo el título común *"Sobre las diversidades de puntos lineales e infinitos"*. Aquí se plantean, entre otras, las definiciones de conjunto cerrado, denso, denso en sí, perfecto y conexo. En las dos partes de los *"Artículos sobre teoría de conjuntos transfinitos"*, publicados en 1895-1897, tuvo lugar una representación sistemática de la teoría de los números transfinitos.

Surge ahora la pregunta ¿existen conjuntos con potencia superior a la del continuo? Tomemos un conjunto de potencia n. A un elemento x del conjunto hacemos corresponder el número 0 o el número 1. Definimos de esa forma una función f(x) que depende de n elecciones arbitrarias entre dos números 0 y 1. Hay, pues, 2^n de esas funciones. Tenemos $2^n > n$. En efecto, hagamos corresponder a un elemento a de E la función f(x) tal que f(a)=1 y f(x)=0 para x ≠ a. Ella pertenece al conjunto de las funciones, cuyo conjunto E tiene la misma potencia que una parte del conjunto de esas funciones. Supongamos ahora que una parte de E tenga la misma potencia que el conjunto de las funciones. Sea a un elemento de esta parte. Le correspondería una función f(x) por la sola condición f(a) f (a).

Se ve que f(a) está bien definida y que f(x) no puede formar parte del conjunto, puesto que ella difiere de toda función f(x), al menos en el punto x = a. Por consiguiente, el conjunto de las funciones según la definición de la desigualdad de potencias, tiene una potencia superior a n.

Si, en particular, se considera las funciones f(x)=0 ó 1 y definidas por un valor real cualquiera de x, se obtiene un conjunto de potencia 2^c que es superior al continuo.

La noción de *número transfinito* parece haberse introducido por primera vez a propósito de la teoría de los conjuntos de puntos. Se llama punto de acumulación o punto límite de un conjunto infinito de puntos sobre un segmento, un punto tal - si existe- que haya puntos del conjunto tan "cerca" de él como se quiera. El conjunto de puntos límites de un conjunto P es llamado el conjunto derivado de orden 1 y se denota P'. Este conjunto puede ser infinito. Posee, pues, un conjunto derivado P'' formado de sus puntos de acumulación y así sucesivamente. De una forma general, puede existir un conjunto derivado P(v) cualquiera que sea v entero y si resulta que todos los P(v) poseen puntos comunes, cualquiera que sea el entero v, se concibe que ese conjunto de puntos comunes forma un derivado de un nuevo género. Se denomina derivado w de P y se le designa por P(w). Todo sucede como si después de los enteros 1, 2,..., v,... existiese un número de género nuevo w superior a todos los enteros. Este mismo conjunto puede tener un derivado P(w + 1) y así sucesivamente. Los nuevos símbolos w, w + 1,... que van a permitirnos notar los enteros más allá de su sucesión natural, son llamados números ordinarios transfinitos.

He aquí como Cantor, que es el primero en considerarlos, expone su formación (Acta Mathematica, t. II, 385-399).

La sucesión natural de los enteros reposa sobre la operación de adición de la unidad a un entero ya formado. Llamaremos a ese principio de formación de la sucesión de los enteros, *primer principio de formación*. La aplicación de este principio no conoce fin. Sin embargo, esta aplicación no puede hacernos salir de la sucesión natural de los enteros 1, 2,..., v,... o número de clase.

Para superar esta sucesión natural de los enteros tenemos que desarrollar ese primer principio de formación. Es precisamente lo que hace Cantor, valiéndose del *segundo principio de formación*, considerando que existe un número w inmediatamente superior a todos los enteros de la sucesión. Aplicando a ese número w el primer principio de formación, obtendremos w + 1, w + 2,...,... y con una nueva aplicación del segundo principio, 2w. Combinando de esa forma la aplicación del primer y del segundo principio de formación, obtenemos la sucesión de enteros: 1, 2,..., v,..., w, w + 1, ..., w + v, ..., 2w, 2w + 1, ..., 3w, ..., w^2, ..., w^v , ...w^w y así sucesivamente, pero en un orden perfectamente determinado. Los números que obtenemos de esta forma a partir de w se llaman *números de la clase (II)*.

"Se podría creer, añade Cantor, *que vamos a perdernos al infinito en esta*

formación de nuevos números infinitos, determinados y que no estamos en condiciones de frenar provisionalmente ese proceso sin fin, para llegar por él a una limitación semejante a la que hemos encontrado, de hecho, en cierto sentido, respecto a la antigua clase de números finitos: allí se empleaba solamente el primer principio de formación y no podíamos salir de la sucesión natural de los enteros".

Así, partiendo de un número de la clase (II), todos los números que le preceden forman un conjunto evidentemente numerable, puesto que están definidos los unos después de los otros por un número numerable de pasos al límite; de la misma forma que todos los números de la clase (I) que preceden a un número necesariamente finito de esta clase, forman un conjunto finito.

Si, por consecuencia, admitimos -y he aquí el desarrollo obtenido- lo que Cantor llama un *principio de detención o limitación*, a saber, que todos los números de la clase (II) que preceden a uno de entre ellos forman un conjunto numerable, concebimos un número a, inmediatamente superior a todos los números de la clase (II), pero que pertenece a la clase siguiente (III) y que denota un conjunto de potencia superior al numerable, de la misma forma que el número w inmediatamente superior a todos los enteros finitos, denota un conjunto infinito de potencia numerable, inmediatamente superior a todas las potencias finitas.

Esta generación de los números transfinitos no conocerá fin. Esos números transfinitos se suceden en un orden bien determinado. Van a encontrar una aplicación inmediata en el estudio de los conjuntos ordenados.

Se dice que un conjunto dado U es *ordenado* si siendo a y b dos elementos de U, uno de esos elementos se considera como precedente al otro, lo que se escribe: a precede a b. La convención que permite la ordenación puede ser cualquiera. Es suficiente que a precede a b sea incompatible con b precede a a y que a precede a b y b precede a c lleven a que a precede a c.

Es de esta forma que el conjunto de los racionales puede ser ordenado. Es suficiente de convenir que a precede a b si a < b.

Se dice que dos conjuntos son semejantes si entre sus elementos existe una correspondencia biunívoca que conserve las relaciones de orden. De dos conjuntos semejantes se dice que tienen el mismo tipo de orden.

La noción de orden está precisada por la noción de buen orden de un conjunto. Se dice que un conjunto está *bien ordenado* cuando todo subconjunto no vacío tiene un primer elemento. Así pues, el conjunto formado por la sucesión de los enteros está bien ordenado. Se demuestra que un conjunto bien ordenado no es semejante a ninguno de sus segmentos (secciones iniciales).

Todo conjunto de números ordinales está bien ordenado puesto que todo subconjunto de números ordinales contiene un ordinal inferior a todos los demás, que puede ser, por tanto, considerado como el primer elemento.

Recíprocamente, un conjunto bien ordenado tiene por tipo de orden un número ordinal 0. Este conjunto es semejante a todos los ordinales inferiores a 0, ordenados de acuerdo con su magnitud.

Se designan por álefs afectados de índices las potencias sucesivas de los ordinales de cada clase.

Alef cero denota un conjunto ordenado numerable.

Alef uno denota el conjunto de los números de la clase (II) que no es numerable y cuya potencia es inmediatamente superior a la del numerable.

Podemos preguntarnos si se podrá ordenar un conjunto dado. Ciertos teóricos como Zermelo, responden afirmativamente y apoyan su razonamiento sobre un axioma, llamado *axioma de elección o axioma de Zermelo*, que se enuncia así:

> *para todo conjunto M cuyos elementos son conjuntos P, no vacíos y sin elementos comunes dos a dos, existe, al menos, un conjunto N que contiene un elemento, uno solo, de cada conjunto P que pertenece a M.*

Demos un ejemplo como aplicación. Dividamos los números reales en clases, alineando en una misma clase dos números reales, cuya diferencia es racional, y en dos clases diferentes dos números reales cuya diferencia sea irracional. Todo número real pertenece de esa forma, a una sola clase. Según el axioma de elección, existe un conjunto N que contiene un número, uno sólo, de cada una de nuestras clases. Sin embargo, no sabemos determinar tal conjunto. La elección que implica el axioma es, pues, una elección teórica, que existe sin que sea efectivamente posible indicar en todos los casos un medio de realizarla.

Con ayuda de este axioma, Zermelo muestra que todo conjunto tiene la misma potencia que un conjunto bien ordenado. Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre un conjunto cualquiera y un conjunto bien ordenado, convenientemente escogido, sin que podamos explicar siempre de qué forma se puede realizar efectivamente esa correspondencia. Por otra parte, el axioma de elección produjo una agudización de las dificultades en la cimentación de la matemática, como cuando se demostró con su ayuda la existencia de objetos para los cuales no se ha podido indicar ni un sólo ejemplo, este es el caso de la demostración de la existencia de los conjuntos no medibles[13], aunque hasta ahora no se ha logrado construir al menos un ejemplo de un conjunto que no sea medible.

Otra consecuencia muy importante del axioma y que le es equivalente, es la posibilidad de comparar las potencias de dos conjuntos cualesquiera. Sin el axioma de elección no podemos demostrar que dos conjuntos cualesquiera tienen potencias a y b tales que $a = b$, $a < b$ o bien $a > b$. Esta posibilidad de comparar las potencias de dos conjuntos se llama la *tricotomía*. Como todo conjunto, según Zermelo, tiene la misma potencia de un conjunto bien ordenado, es suficiente probar la tricotomía para los conjuntos bien ordenados, es decir, para los álefs.

El axioma de elección conlleva, pues, la tricotomía. Recíprocamente, se demuestra que la tricotomía conlleva el axioma de elección. Se ve de esta forma qué simplificaciones nos da el axioma de elección para la teoría general de los conjuntos. Observemos, no obstante, que incluso con el axioma de elección no podemos demostrar que la potencia inmediatamente superior al numerable es la del conjunto de los números transfinitos de la segunda clase. Siendo la potencia del continuo, como hemos dicho $2^{X_\circ}$, la igualdad:

$$X_1 = 2^{X_0},$$

[13] Ver A.N Kolmogorov y S.V. Fomin-"Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional", E. Mir, Moscú, 1982, pp. 305-306.

es conocida bajo el nombre de hipótesis del continuo, que aparece en el sexto trabajo de 1884 y la respuesta a esta se encontró sólo en 1963, como veremos más abajo.

La solución que da el axioma de Zermelo a diversos problemas de la teoría de conjuntos, es de naturaleza teórica. Por ello entre los matemáticos no existe un absoluto consensus con respecto a la teoría de conjuntos infinitos.

La misma existencia del número infinito ha sido cuestionada. Leibniz, por ejemplo, se manifestaba contrario a la existencia de los números infinitos. Consideraba que un número debía disminuir cuando se le verificaba una resta.

Rusell consideraba todo lo contrario y comentando a Leibniz ("*Obras Completas*", T.II, pág. 1238) expresó:

> *"Se notará que Leibniz considera contradictorio que el todo no es mayor que su parte. Pero la palabra "mayor" tiene muchas acepciones; para nuestro fin debemos sustituirla por la expresión menos ambigua "conteniendo un número mayor de términos.*
>
> *En este sentido no es contradictorio que el todo y la parte sean iguales. Al comprender este hecho se hizo posible la moderna teoría del infinito."*

El elemento conflictivo de la teoría de conjuntos fue la noción de infinito introducida por medio de ella. A la forma de idealización utilizada por Cantor, se le ha dado el nombre de abstracción del infinito actual.

De la teoría de conjuntos, mucho se ha escrito, pero quizás lo que sea más representativo sean las palabras de Hilbert cuando valoró esta como

> *"el fruto más maravilloso del genio matemático y en general una de las obras supremas de la actividad humana puramente intelectual".*

Cantor previó las discusiones en torno a la teoría de conjuntos; en 1883 escribió, con respecto a la estructuración de una teoría general de conjuntos:

> *"No me oculto a mí mismo que con este empeño me coloco en cierta oposición con las concepciones ampliamente difundidas sobre el infinito matemático y con los puntos de vista frecuentemente defendidos acerca de la esencia de la magnitud del número."*

Cantor tuvo en Kronecker un adversario encarnizado, el que sin poder presentar una objeción de peso, atribuyó a Cantor conclusiones inexactas reiteradas. Según una expresión de Hilbert, Kronecker se dejaba llevar de una actitud dogmática que se basaba en la convicción de que no existía lo infinito actual. Incluso, el uso de las series infinitas le resultaba extraño, ya que no admitía las conclusiones transfinitas.

No resulta erróneo suponer que en el grave desmoronamiento psíquico de Cantor de 1884, mucho tuvo que ver las ofensivas expresiones de Kronecker, que llegó incluso a calificar públicamente a Cantor de "corruptor de la juventud". Poincaré llamaba la atención sobre la postura de Kronecker alegando en forma de broma que éste alcanzó notables resultados en las matemáticas porque frecuentemente se olvidaba de sus convicciones filosóficas.

El mismo Poincaré era portador de una concepción muy difundida cuando aún en 1909 opinó que "no existe ningún infinito actual", sino que con lo infinito se designa únicamente la posibilidad de crear ininterrumpidamente nuevos objetos, por muy numerosos que sean los objetos ya creados.

En Dedekind, el inglés Young y el matemático sueco Mittag-Leffler, Cantor tuvo promotores entusiastas de sus ideas. En el Congreso Internacional de Matemática, celebrada en Zurich en 1897, el matemático alemán Hurwitz, uno de los maestros de Hilbert, demostró de forma convincente la importancia del pensamiento teórico-conjuntista en la teoría de funciones.

El concepto de punto límite y el concepto de conjunto cerrado relacionado con aquel, después de la introducción en el año 1902 por H. Lebesgue del concepto de medida de un conjunto y las investigaciones de E. Borel condujeron a la creación de la teoría métrica de conjuntos. Esta última sirvió de base a la teoría general de integración y las series trigonométricas. Más tarde condujo a la construcción, en los trabajos del propio Lebesgue, K. Caratheodory, F. Hausdorff y otros, de la teoría general de la medida.

M. Frechét (1906) y F. Hausdorff (1914), investigando el concepto introducido por Cantor de conexidad y otros cercanos a éste desarrollaron la teoría topológica de conjuntos situados en espacios métricos y topológicos generales. Finalmente, la teoría descriptiva de los conjuntos de puntos y la, relacionada con ella, clasificación general de las funciones discontinuas (clasificación de Baire) tienen su origen aproximadamente en el año 1900 en los trabajos de R. Baire y Lebesgue.

En la consideración de los problemas fundamentales de la teoría del conocimiento, Cantor pretendía seguir las ideas de Platón. Diferenciaba dos tipos de "realidad": los conceptos e ideas constituían la realidad inmanente *"si de acuerdo con definiciones precisas, ocupan en nuestro pensamiento un lugar determinado, diferenciándose claramente de los otros componentes del pensamiento"*. Si las ideas y conceptos representaban procesos y objetos del mundo exterior entonces, en ellos estaba presente una realidad transiente. Estas dos formas de realidad de los conceptos e ideas no se contradicen una de otra, sino al contrario, *"siempre coinciden en el sentido de que cualquier concepto tomado como existente en la primera relación, posee a saber, también infinitas relaciones con la realidad transiente"*.

Con respecto al conocimiento, él repite los criterios fundamentales de Platón.

Esto permite, aparentemente, concluir que la posición idealista de Cantor coincide con la filosofía de Platón.

Luitz Brouwer

Existen dos grandes diferencias:

1. los conceptos matemáticos deben estar libres de contradicciones internas y

2. ellos deben encontrarse en determinadas y precisas relaciones con los conceptos asumidos anteriormente. Estas exigencias no concuerdan en esencia con la filosofía de Platón.

El mismo Cantor señala que en el dominio de la filosofía, él ocupa una posición idealista la cual llamó "realista". Esto es válido pero con una precisión. Los criterios filosóficos de Cantor eran duales: idealistas en la esfera de los problemas generales de la filosofía, pero materialista cuando trataba los problemas específicos de la metodología de la matemática.

Las reflexiones filosóficas de Cantor atestiguan que veía la fuente de las leyes generales de la teoría de conjuntos no tanto en la realidad transiente de sus conceptos como en la contemplación interior. No es asombroso que estos razonamientos no le produjeran nada para la fundamentación de su teoría de conjuntos; el mismo Cantor más adelante no tuvo más remedio que renunciar a ellos.

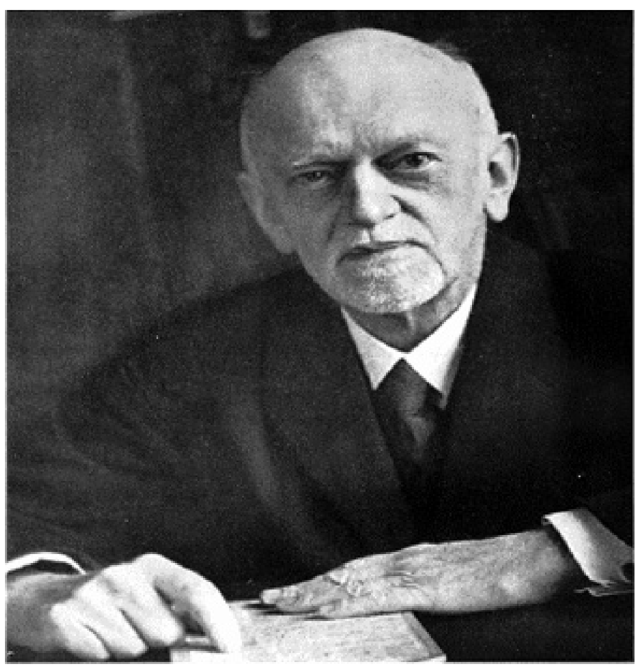
Bertrand Russell

Georg Cantor (1845-1918) fue quien prácticamente formuló de manera individual la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX y principios del XX. Su objetivo era el de formalizar las matemáticas como ya se había hecho con el cálculo cien años antes. Cantor comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de las matemáticas y explicó todo basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar a las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

El problema apareció cuando se comenzaron a encontrar paradojas en esta teoría, siendo la más célebre la paradoja de Russell, y más tarde varios matemáticos encontraron más paradojas, incluyendo al mismo Cantor.

Russell descubrió su paradoja en 1901, y la publicó en un apéndice de su libro *"Principios de las matemáticas".*

Cuando los matemáticos supieron de esta paradoja, muchos se preguntaron si las matemáticas en realidad eran consistentes, y sobre todo verdaderas, ya que cualquier suposición matemática podía basarse en una teoría inconsistente. La primera propuesta para solucionar el problema de las paradojas provino de un matemático holandés llamado Brouwer, quien propuso una redefinición radical de todas las matemáticas y prometió una solución al conflicto.



David Hilbert

El programa de Brouwer se basaba en lo más simple de la intuición: el aceptaba los conceptos que son aparentes a la intuición general. Esta filosofía rechazaba muchos principios fundamentales de las matemáticas, pero en cambio, solucionaba satisfactoriamente el problema de las paradojas. Particularmente Brouwer rechazaba el principio del medio excluido, el cual decía que los elementos de un conjunto o bien tienen una propiedad A o no la tienen, lo cuál sería la negación de la propiedad A.

A esta corriente de pensamiento se le llamó intuicionismo. Por otro lado, David Hilbert se opuso al intuicionismo y aunque no toleraba las paradojas, no estaba dispuesto a ver las matemáticas mutiladas. En 1904 propuso la teoría de la prueba, la cuál era una teoría de la lógica independiente del contexto y podría ser aplicada a las matemáticas sin encontrar paradojas. Russell a su vez desarrolló su teoría de los tipos para evitar las paradojas. El proponía que los enunciados se acomodaran jerárquicamente. Russell publicó sus resultados en 1908 con la colaboración de Alfred North Whitehead.

La cuarta respuesta a la paradoja fue de Ernst Zermelo en 1908 con la axiomatización de la teoría de conjuntos.

La mejor prueba de que la teoría de conjuntos no ha logrado unificar a las matemáticas es que éstas se han ramificado en áreas muy diferenciadas, como la aritmética, el álgebra, la trigonometría y geometría; también se han separados distintos campos como el cálculo, la topología, la teoría de conjuntos, la teoría de los números y la estadística.

Las paradojas han existido en las matemáticas desde sus comienzos y han sido fundamentales para una formalización más cuidadosa de sus teoremas y leyes. Un ejemplo muy antiguo es la paradoja de Zenón, la cual cobró importancia en el desarrollo del cálculo; como veremos más adelante, las paradojas de la teoría de conjuntos han hecho que los matemáticos cuestionen la consistencia de las matemáticas y vean más allá de lo que hasta ahora se ha formulado.

Paradoja de Cantor

El conjunto de todos los conjuntos. Sea C el conjunto de todos los conjuntos. Entonces todo subconjunto de C es así mismo un elemento de C; luego, el conjunto potencia de C es un subconjunto de C; pero esto implica que la cardinalidad del conjunto potencia es menor o igual a la cardinalidad de C. Pero entonces, según el teorema de Cantor, la cardinalidad de C debe ser menor a la cardinalidad del conjunto potencia. Así pues, el concepto de conjunto de todos los conjuntos lleva a una contradicción.

Paradoja de Russell

Sea Z el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Se pregunta ¿Z es o no elemento de sí mismo? Si Z no pertenece a Z, entonces, por la definición de Z, Z pertenece a sí mismo. Pero si Z pertenece a Z, entonces por la definición de Z, Z no pertenece a sí mismo. En cualquiera de los dos casos hay contradicción.

Esta paradoja es análoga a la paradoja del barbero: En una aldea hay un barbero que afeita solamente a los hombres que no se afeitan ellos mismos. Se pregunta ¿Al barbero quién lo afeita?

Paradoja de Burali-Forti: conjunto de todos los números ordinales

Sea D el conjunto de todos los números ordinales. Por un teorema anterior, D es un conjunto bien ordenado; sea A=ord(D). Considérese ahora s(A) el conjunto de todos los números ordinales menores que A. Obsérvese que

1. Puesto que S(A) consiste en todos los elementos de D que son anteriores a A, S(A) es una sección inicial de D.
2. Por un teorema previo, A=ord(s(A)); por tanto, ord(s(a))= A= ord D. Por consiguiente D es isomorfo a una de sus secciones iniciales. Así pues el concepto de conjunto de todos los números ordinales lleva a una contradicción.

Conjunto de todos los números cardinales

Sea A el conjunto de todos los números cardinales. Entonces, para cada cardinal a que pertenece a A, hay un conjunto A_a tal que a es igual a la cardinalidad de A_a.

Considérese el conjunto potencia de A. Nótese que el conjunto potencia de A es menor o igual a A, y en particular, la cardinalidad del conjunto potencia de A es menor o igual a la cardinalidad de A.
Pero por el teorema de Cantor, el concepto de conjunto de todos los números cardinales es contradictorio.

Familia de todos los conjuntos equipotentes a un conjunto

Sea A = {a, b, ...} un conjunto (no necesariamente) enumerable y sea B = {A={i, j, ...}} otro conjunto cualquiera. Considérense los conjuntos

Ai={(a,i), (b,i), .}

Aj={(a,j), (b,j), ...}

Es decir la familia de conjuntos {Ai} tal que i pertenece a B. Nótese que su cardinalidad es igual a la cardinalidad de B.
Sea ahora a la familia de todos los conjuntos equipotentes al A. Considerando el conjunto potencia de a y definiendo la familia de conjuntos {Ai} tal que i pertenece al conjunto potencia de a, entonces la cardinalidad de a es igual a la cardinalidad de {Ai} tal que I pertenece al conjunto potencia y es menor a la cardinalidad de a.
Pero por el teorema de Cantor, el concepto de familia de todos los conjuntos equivalentes a un conjunto es contradictorio.

Familia de todos los conjuntos isomorfos a un conjunto bien ordenado.

Sea A un conjunto bien ordenado. Entonces el conjunto Ai ordenado por (a, i) menor o igual a (b, i) si a es menor o igual a b, es bien ordenado y es isomorfo al A. Esto es Ai es parecido a A.
Sea L la familia de todos los conjuntos isomorfos al conjunto bien ordenado A. Considérese el conjunto potencia de L y defínase la familia de conjuntos {Ai} tal que I pertenece al conjunto potencia de L. Como cada conjunto Ai es isomorfo al conjunto A, entonces {Ai} tal que i pertenece al conjunto potencia es subconjunto de L.

Por el teorema de Cantor el concepto de familia de todos los conjuntos isomorfos a un conjunto bien ordenado es contradictorio.

Paradoja de Richard

Supongamos todas las definiciones de la aritmética ordenada según su longitud, por la cantidad de letras que se contienen en ellas. Si las definiciones que contienen la misma cantidad de letras las ordenamos alfabéticamente, entonces, a cada definición se puede hacer corresponder un número natural n -su número de orden. Llamamos número de Richard a todo número que no posee la propiedad la cual está fijada en la correspondiente definición. Pero la definición de número de Richard también es una definición de la aritmética y a ella le corresponde también cierto número natural.

Sea este número m. ¿Es el número m un número de Richard?. Aquí está la contradicción ya que m es un número de Richard si y sólo sí no posee la propiedad que se exige en la definición, es decir, si y sólo sí no es un número de Richard.

Paradoja de Karl Menger.

Reunamos en un cuadro las tres proposiciones siguientes:

"2 + 2 = 5",

"4 + 6 = 3"

y "todas las proposiciones escritas en este cuadro son falsas". El análisis revela fácilmente, que esta última es contradictoria, pues si se supone que es verdadera, se sigue que es falsa, y si se supone que es falsa, se sigue que es verdadera.

Importancia de las paradojas en la Teoría de Conjuntos

El hallazgo de las paradojas, relacionadas con el concepto de conjunto, transformó el problema de la fundamentación de la teoría de conjuntos de un significado teórico, como lo era para Frege, en un problema metodológico. En un sentido estrecho consistía en desprenderse de las paradojas conocidas. En un sentido más amplio era necesario contestar al problema: ¿en qué medida es una pretensión válida tratar de eliminar la contradicción en la matemática?, ¿Podrá alguna vez la matemática obtener una fundamentación definitiva?. A comienzos del siglo XX todavía había una esperanza de encontrar tal fundamentación. Este problema se convierte así en uno de los problemas filosóficos de la matemática contemporánea más importantes y todavía mantiene cierto interés.

La importancia de las paradojas en la teoría de conjuntos aparece cuando nos damos cuenta que usando la lógica clásica todos los enunciados provienen de una contradicción. A los ojos de muchos parecería que ninguna prueba matemática es confiable, ya que se descubrió que la lógica y la teoría de conjuntos debajo de todas las matemáticas son contradictorias.

En la década de los 30's el matemático Kurt Godel (1906-1978) probó un teorema que decía que en ningún sistema matemático avanzado habría declaraciones que no pudieran probarse si son verdaderas o falsas desde el interior de ese sistema. Tales declaraciones explican si el sistema contiene paradojas o no. Después de Godel la dirección de las matemáticas modernas ha cambiado de un intento de quitar las paradojas a una dirección en la cual las paradojas son parte del juego. Quizás en el futuro tengamos que aceptar la posibilidad de paradojas en las teoría matemáticas nuevas y aprender a reconocer sus distintas facetas.

Las paradojas son una parte importante de las matemáticas modernas. Las paradojas de la teoría de conjuntos tuvieron un efecto profundo en el desarrollo y la comprensión de la matemática moderna. Los matemáticos actuales son más cuidadosos en el estudio de todas las suposiciones que forman una teoría. El matemático se interesa en que suposiciones se hacen, ya sea que se puedan probar como falsas o verdaderas. También el matemático se interesa en el efecto de cambiar una suposición dada. Esto podría resultar en nuevas teorías o nuevas paradojas que nos llevan a un mejor entendimiento de la teoría que se estudia.

Desarrollo del estilo del pensamiento teórico-conjuntista

Frecuentemente, cuando se caracteriza el estilo del pensamiento teórico-cojuntista de la matemática, se subrayan dos rasgos diferenciantes. Primeramente, la utilización de la abstracción del infinito actual, la cual permite considerar conjuntos infinitos en su realización conjunta y total. En segundo lugar, la aplicación de los principios y leyes de la lógica clásica, sin ninguna restricción, a los conjuntos infinitos. Estas características, sin dudas, constituyen aspectos determinantes en el estilo de pensamiento teórico- conjuntista, sin embargo, ni la abstracción del infinito actual, ni la libre utilización de la lógica, son suficientes para construir la teoría de conjuntos y mucho menos servirían para elaborar un estilo de pensamiento dominante, deben estar subordinados a un fin principal -la construcción de una teoría.

A continuación relacionamos algunos hechos que muestran la penetración cada vez más profunda del estilo conjuntista en la matemática y el proceso de transformación de la teoría de conjuntos en un estilo universal.

1900-Hilbert en el II Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París, plantea sus famosos 23 problemas. El nº 1 es la hipótesis del continuo, el segundo estaba relacionado con la consistencia de los axiomas aritméticos.

1900	Se celebra el Primer Congreso Internacional de Filosofía en París, donde Peano influye decisivamente en la carrera intelectual de Russell y muchos otros matemáticos, lógicos y filósofos.

1903	Russell publica su libro "Principios de las Matemáticas".
1903	Lebesgue introduce los nuevos conceptos de medida de conjuntos y funciones medibles.
1904 a 1908	Zermelo elabora una axiomática general de la teoría de conjuntos que pretende eliminar las paradojas.
1904 a 1910	Hilbert investiga los espacios funcionales infinitos.
1903	Borel introduce en la teoría de las probabilidades el concepto de medida de conjuntos.
1904	Frechet introduce el concepto de espacio métrico abstracto.
1906 a 1912	A. A. Markov, discípulo de Chebishev desarrolló las ideas de éste en la teoría de las probabilidades (cadenas de Markov) hasta tal punto, que son considerados en todas partes -según Kolmogorov- como el punto de partida de todo el desarrollo ulterior de la teoría de las probabilidades.
1908	Brouwer publica "Sobre los fundamentos de la matemática", en el cual formula sus ideas intuicionistas restringiendo la utilización de la abstracción del infinito actual.
1910	Lebesgue elabora la teoría de funciones de conjunto.
1910 a 1913	Russell y Whitehead publicaron sus "Principia Mathematica", donde exponen los fundamentos logicistas de la Matemática.
1910 a 1930	Egorov y Lusin establecen la escuela moscovita de teoría de funciones.
1914	Hausdorff publica sus "Fundamentos de la Teoría de Conjuntos", donde introduce importantes conceptos topológicos.
	Frechet da la definición de continuidad y diferencial de funcionales lineales.
1916	Bernstein publica el primer sistema axiomático de la

	teoría de probabilidades.
1919	Noeter construye los fundamentos del álgebra abstracta conjuntista. Alexandrov realiza la síntesis de las direcciones combinatorias y conjuntistas en la topología.
1922	Banach elabora el concepto de espacio vectorial normado completo, funda la escuela polaca de topología. Skolem formaliza el sistema clásico de Zermelo (1904).
1925	von Neumann formula una teoría axiomática de conjuntos.
1925 a 1927	von Neumann y Riesz independientemente construyen la teoría espectral de operadores lineales.
1930	Kolmogorov-Hinchin-Levi-Dool, independientemente, comienzan a investigar los procesos estocásticos. Petrovski-Sobolev-Schauder-Leray, elaboran independientemente la teoría general de las ecuaciones en derivadas parciales utilizando un enfoque conjuntista.
1930	Guelfand y von Neumann desarrollan los métodos algebraicos del análisis funcional.
1930	Godel demuestra los metateoremas de la incompletitud y la no contradicción, sobre la axiomática de la teoría de conjuntos.
1930	Hahn establece la relación entre la teoría de funciones y la topología general.
1933 a 1939	Hilbert y Ackermann publican los "Fundamentos de la Matemática", donde exponen la teoría formalista para salir de la crisis conjuntista.

1935	Kolmogorov formula la idea de espacio vectorial topológico. Zorn formula el lema que lleva su nombre. von Neumann elabora la teoría de los espacios vectoriales topológicos completos. Kolmogorov y Alexander, independientemente, introducen el concepto de cohomología. Sobolev y Schwartz elaboran, independientemente, la teoría de las distribuciones.
1937	Pontriaguin construye la teoría de caracteres de los grupos topológicos. Pontriaguin y Andronov definen el concepto de estabilidad estructural (sistemas gruesos). Se establece el grupo de matemáticos bajo el nombre de Nicholás Bourbaki.
1937 a 1954	Bernays reelabora la axiomática de la teoría de conjuntos.
1938	Godel investiga el problema del continuo y el axioma de selección. Demuestra la imposibilidad de demostrar el primero dentro de la teoría axiomática de conjuntos.
1940	Aparece el primer tomo de los "Elementos de la Matemática" de N. Bourbaki, obra con la cual se pretende exponer bajo el fundamento riguroso de la axiomática de conjuntos, introducida por Zermelo y mejorada por Fraenkel, toda la matemática contemporánea.
1963	Paul Cohen estableció que la hipótesis del continuo es indemostrable en la axiomática de la teoría de conjuntos.

Sobre todo a partir de la década del 50 el desarrollo del estilo teórico-conjuntista llega a su máximo desarrollo. Por varios años estas concepciones van a prevalecer en toda exposición matemática y aunque siempre existieron quienes se mantuvieron en sus posiciones clásicas, la influencia llegó a hacerse tan exagerada (recordemos que en particular, Euclides murió definitivamente) que, como siempre ocurre en tales casos, se generó una oposición tal que ya en la década de los 70 había logrado borrar las huellas más nefastas del extremismo bourbakiano.

Como todo estilo de pensamiento, el enfoque teórico-conjuntista tiene sus méritos y sus deficiencias.

Entre los primeros tenemos:

1. Considerar los objetos y sistemas más complejos en los términos más simples.
2. Un único punto de vista que permite encontrar las relaciones entre las diferentes teorías y posibilita construir una metodología universal.

De las deficiencias podemos señalar:

1. El reduccionismo teórico-conjuntista hace desaparecer lo específico e irrepetible de los objetos matemáticos.
2. Se esconde el carácter histórico de la formación de los conceptos más importantes.
3. Se niega el desarrollo del conocimiento, despreciando el papel de la práctica y otros factores externos.
4. No es efectivo desde el punto de vista didáctico y heurístico.

Capítulo 6
Paradojas Numéricas

Sabemos que las paradojas de Zenón sobretodo -usadas para refutar ciertos supuestos de la Teoría de las Mónadas-, hicieron que los Griegos miraran con suspicacia el uso del infinitesimal, y condujeron en última instancia a la invención del método de exhaución.

Retomaremos algunas de las cuestiones usadas por Zenón, para introducir una nueva serie de paradojas que me han parecido interesantes y, que envuelven tratamientos numéricos de diversos tipos[14].

1. Paradojas con series numéricas

Una serie infinita es simplemente una suma indicada de infinitos términos, pero con este simple planteamiento, surgen muchas cuestiones. ¿Qué significa la suma de infinitos números?, ¿Podemos siempre sumar infinitos números para obtener una suma?, ¿Podemos siempre sumar infinitos números?

En muchas ocasiones trabajamos con sumas de infinitos números. Cuando escribimos

$$1/3 = 0,3333...$$

tenemos una suma infinita. En nuestra notación decimal, el símbolo 0,3333... significa

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} ....$$

Así podemos afirmar que existe la suma de ese conjunto de números y que la suma es 1/3.

Los griegos antiguos pensaron que ningún conjunto infinito de números podría, posiblemente, tener una suma finita. Por esta causa, cayeron en ciertas paradojas

[14] Consultar entre otros Israel Kleiner and Nitsa Movshovitz-Hadar-"Paradoxes in Mathematics: History and Pedagogy", Proceedings HPM-Blumenau/Brasil, 25-27 july 1994, 23-34; Ali Donmez-"Some paradoxes in Mathematics", Dogus University Journal, 1(2000), 79-87.

lógicas, algunas de las cuales ya hemos visto con la Escuela Eleática. En el caso de Zenón, excepto las dos últimas aporías, no hay mención del tiempo en el argumento usado. Consideremos la primera de ellas.

Si consideramos que caminamos la mitad de la distancia en media hora y continuamos caminando a una velocidad constante, el hombre debe caminar la distancia total en una hora. Esto implica que la suma infinita posee suma uno, es decir,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\dots = 1$$

Por otra parte, si el hombre disminuye paulatinamente la velocidad, de tal forma que cada segmento requiera la misma cantidad de tiempo, por ejemplo media hora, entonces el tiempo total es

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

que evidentemente, no puede tener suma finita.

¿Cómo pueden adicionarse infinitos números para obtener un número? Quizás la forma más simple de visualizar esto es con el siguiente ejemplo[15]

Consideremos un segmento de longitud 2. Divídalo en dos segmentos iguales de longitud uno cada uno. Deje el segmento de la izquierda y divida el segmento de la derecha en dos segmentos de igual longitud. Divida el segmento derecho de longitud 1/2 en dos segmentos de longitud 1/4 cada uno. Continúe el proceso infinitamente. Obtenemos una descomposición del segmento original de longitud 2 en segmentos de longitud 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...y así sucesivamente, por tanto

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots = 2$$

[15] En el caso de paradojas que envuelven descomposición de objetos geométricos, trataremos un ejemplo similar.

Esta suma es la que objeta Zenón, a pesar de saber que el corredor llegará finalmente a la meta, y esto es precisamente lo que desató la controversia. La suma anterior pudo obtenerse muchos siglos después de Zenón de la forma

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Si n tiende a infinito, entonces obtenemos como antes 2.

2. Paradojas que envuelven el concepto de número

La evolución del concepto de número ha estado permeado por paradojas durante casi toda su evolución, como bien señala Davis[16]:

> *"Es paradójico que mientras que las Matemáticas tienen la reputación de ser un tema que no arroja contradicciones, en realidad ella tiene una larga historia viviendo con contradicciones. Éste se ve mejor visto en las extensiones de la noción del número que se han hecho durante 2500 años. Desde la limitada noción de enteros, a fracciones, números negativos, números irracionales, números complejos, números transfinitos, cada extensión, en este camino, superó un conjunto de demandas contradictorias".*

El primero de los ejemplos históricos que consideraremos nos lleva a la Grecia Antigua, unos 2500 años atrás.

a.- Los Pitagóricos de la 6^{ta} centuria A.C. creían que todo segmento de línea recta puede ser "medido" por un número entero o por la razón de dos enteros. A los pitagóricos esto no les parecía, probablemente, un hecho plausible pero era un artículo de fe, un aspecto fundamental de su filosofía. Además, la idea formaba la base de la teoría pitagórica de las proporciones[17]. Esto les produjo un gran shock (una paradoja) cuando descubrieron que la diagonal de un cuadrado unitario no

[16] P. J. Davis-"The mathematics of matrices", Blaisdell, 1965, p. 305.
[17] Ver Van der Waerden, B.L.-"Science awakening", I, Scholar's Bookshelf, 1988 (orig. 1954).

puede ser medida por un número entero o por la razón de dos enteros o, como los griegos, puntualizaron[18], que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. La demostración de este hecho es esencialmente la misma que utilizamos hoy en día para demostrar que √2 es irracional.

El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado tuvo serias consecuencias para la Matemática Griega. Desde el punto de vista positivo, inspiró a Eudoxio a encontrar una sofisticada teoría de las proporciones la cual aplicó tanto a magnitudes conmensurables e inconmensurables. Esto, a su vez, motivó a Dedekind más de dos milenios después a definir los números reales vía las Cortaduras de Dedekind. Por otra parte, enfiló la Matemática Griega (al menos en su período más productivo, el período clásico) de una armoniosa combinación de los números y la geometría, a una casi exclusivamente relacionada con la Geometría.

Los estudiantes son a menudo escépticos de la necesidad de pruebas rigurosas, especialmente de los resultados que parecen razonablemente intuitivos. Pero *"el estudiante que nunca ha sido impresionado por una prueba matemática ha perdido una experiencia mental básica[19].* Para proveer a ella o a él de esa experiencia debemos centrarnos en resultados no intuitivos - o mejor, resultados contra intuitivos- que claman por una prueba rigurosa, deductiva. Un excelente ejemplo es la irracionalidad de √2. Como Knorr puntualizó[20]:

> *"La noción de inconmensurabilidad... [es]* intrínsecamente *teórica y demanda argumentos deductivos de tipo indirecto; ningún procedimiento concreto o práctico puede sugerirse más que el segmento [inconmensurable] evade la descripción en términos de la razón de números enteros."*

De hecho, la prueba de la inconmensurabilidad de √2 es la primera demostración conocida que usa el método de reducción al absurdo, por contradicción, en la Matemática.

---

[18] La paradoja fue obtenida utilizando el Teorema de Pitágoras, esto dio lugar a una "metaparadoja", un planteamiento paradójico no técnico (no matemático en este caso), sobre un fenómeno paradójico técnico: El Teorema de Pitágoras tiró por tierra su filosofía y su teoría de las proporciones.

[19] G. Polya-"Mathematical discovery", vol. 2, Wiley, 1981 (orig. 1962), p. 26.

[20] W. R. Knorr-"The early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity", in "Theory change, ancient axiomatics and Galileo's methodology", J. Hintikka et al (ed.), D. Reidel, 1990, pp. 145-186.

Es conveniente exponer a los estudiantes a los conflictos inherentes en la anterior paradoja *antes* de introducir la noción de número irracional. Así, se puede comenzar probando que $\sqrt{2}$ es irracional sin plantear que esto es lo que Ud. desea probar, la *reducción al absurdo* en la demostración crea entonces la necesidad de ampliar la noción de número que incluya expresiones como $\sqrt{2}$ [21].

b.- La introducción de los números negativos en Matemática y su uso consecuente, ocasionó considerable consternación y dificultades. El principal marco teórico que se debió abandonar fue la prohibición de sustraer un número mayor de uno menor. Como Wallis puntualizó en el Siglo XVII[22] *"[¿Cómo puede ser que] una magnitud... sea menor que nada, o que un número sea más pequeño que ninguno?".*

Relacionado con esta paradoja, tenemos los siguientes dos "teoremas".

Teorema 1 (Wallis)

Los números negativos son mayores que el infinito.

"Demostración." Puesto que, para a positivo, $a/0 = \infty$, $a/b > \infty$, con b un número negativo. Pues el denominador menor aumenta la fracción.

Teorema 2 (Arnault)

$$1/-1 \neq -1/1.$$

---

[21] Tomemos el caso de los números irracionales de la forma $\sqrt[n]{a}$ demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado según todo los visos, data de la segunda mitad del Siglo V A.C. Es una de las demostraciones matemáticas más antiguas, quizás la primera, y de cuya calidad efectivamente demostrativa tenemos constancia. Según informa Aristóteles, descansa en la reducción de la hipótesis de la conmensurabilidad de la diagonal al absurdo de que un mismo número resulte par e impar. Una versión posterior y más elaborada que se añadió al final del libro X de los "Elementos" de Euclides como "proposición 117" es apócrifa sin duda, consulte I. Müeller- "Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements", MIT Press, 1981; L. Vega-"En torno a la idea tradicional de demostración", Laguna, 3:1995, 28-56 y L. Vega-"Matemática y demostración: las vicisitudes actuales de una antigua liaison" en "El velo y la trenza", Fernando Zalamea (ed.), Editorial Universidad Nacional, Colombia, 1997, 4979) y hoy ya no se encuentra en las ediciones del tratado (ver Euclides-"Elementos", Dpto Matemática Educativa, s/f, CINVESTAV- IPN, México o Euclides-"Elementos", Editorial Gredos, 3 vols, 1991-1996, Madrid.). Concretamente, la prueba de la inconmensurabilidad de V2 establece la imposibilidad de una medida numérica (e.g. exacta) común entre las magnitudes consideradas, conclusión negativa de máximo alcance que los griegos sólo podían establecer mediante el recurso lógico de la deducción indirecta o reducción al absurdo dentro del marco teórico de discurso dado, tal es así, que la demostración directa de un resultado paralelo en la moderna teoría de los números (que la raíz cuadrada de un entero o es entera o es irracional) ha debido esperar a mediados del siglo pasado (L. Lowenhein-"On making indirect proofs direct", Scripta Mathematica, 28/2, 1946, 101-115 (ed. y revisión inglesa de W. O. Quine)). La prueba de Lowenheim, mucho más interesante e informativa que la tradicional prueba indirecta de la irracionalidad de V2, que supone no sólo nuestra teoría lógica de la cuantificación sino el principio de elección, no pasa de ser una curiosidad técnica prácticamente ignorada.

[22] E. Nagel-"Números imposibles: un capítulo en la historia de la lógica moderna", Stud. In the Hist. Of Ideas 3(1935), 429-474, la cita está tomada de la p. 438.

"Demostración." La razón de un número mayor a otro menor, no puede ser igual a la razón de uno amenor a otro mayor.

Esto fue comunicado por Arnault (un matemático del Siglo XVII) en una carta a Leibniz, quien puntualizó las dificultades antes señaladas, aunque argumentó que los números negativos debían ser tolerados porque eran útiles y, en general, llevan a resultados consistentes[23].

La justificación de nociones, de otra manera inexplicables, considerando que rinden resultados útiles ha ocurrido con frecuencia en la evolución de las matemáticas. Esto trae aparejado la siguiente

Metaparadoja: ¿Cómo pueden las cosas sin sentido (o en el mejor de los casos inexplicables) ser tan útiles?

Por supuesto, además de la inexplicabilidad (o confusión) que apareció en el decursar del tiempo, también emergieron la claridad y la comprensión. Las paradojas contenidas en estos dos teoremas resultan de la extensión a números negativos de propiedades que se cumplen para números positivos, un tipo de argumento *por analogía.* Este es un principio útil en Pedagogía, pero debe ser tratado con precaución en la Matemática.

Los errores anteriores (y otros) sobre los números negativos, fueron el instrumental en la clarificación de las reglas de operación contales números. Esto debe alertar a los estudiantes que tomen gran cuidado al tratar con números negativos. c) La solución por radicales de la ecuación cúbica fue una de las garndes conquistas matemáticas del Siglo XVI. La solución de Cardano de la ecuación $x^3 = ax + b$ fue dada por la fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

[23] Ver F. Cajori-"History of exponential and logarithmic concepts", Amer. Math. Monthly 20 (1913), varios números, especialmente pp. 39-40.

Bombelli la aplicó a la ecuación $x^3 = 15x + 4$ y obtuvo

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Cardano había denegado la aplicabilidad de su fórmula a tal ecuación puesto que introduce raíces cuadradas de números negativos, que él rechazaba. Pero Bombelli notó, por inspección, que $x = 4$ es una solución de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ (las otras dos $-2\pm\sqrt{3}$, son también reales). Entonces tenemos la paradoja: Las raíces de $x^3 = 15x + 4$ son reales, llevan a una fórmula donde las raíces envuelven números complejos, y al mismo tiempo números sin significado. *"Toda la cuestión parecía basarse sobre sofismas más bien que sobre verdad"* apuntó Bombelli[24], y él mismo resolvió el sofisma obteniendo reglas para manipular expresiones de la forma

$$a + b\sqrt{-1}$$

En particular, Bombelli mostró que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} \quad y \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

y por tanto, resolvió la paradoja. Ese fue el comienzo de los números complejos. Nacimiento que no trajo aparejado legitimación. Hubo que esperar dos siglos y medio para que los números complejos fueron aceptados *bona fide* como entidades matemáticas.

El ejemplo de Bombelli, $x^3 = 15x + 4$, es muy efectivo para introducir en los estudiantes los números complejos. Estos números pueden ser ignorados cuando tratamos con ecuaciones cuadráticas, pues en tal caso decimos que no tienen solución real. Pero los números complejos pueden ser contenidos en el tratamiento de las ecuaciones cúbicas. En general, introducir un concepto matemático

[24] En Leapfrogs-"Imaginary logarithms", E.G.M. Mann & Son (England), 1978, p. 2.

históricamente, mostrando qué problemas llevaron a su surgimiento, nos provee de una buena motivación y, por tanto, es una buena práctica. La naturaleza paradójica del problema en cuestión, solo amplia su valor pedagógico.

3. Paradojas Estadísticas.

Paradoja de los cuervos.

Enunciemos la siguiente ley científica *Todos los cuervos son negros.* Si solamente se hubieran observado tres o cuatro cuervos negros, la ley estaría débilmente confirmada. Si observamos millones de cuervos, y todos son negros, la ley estaría fuertemente confirmada. Si existiese un cuervo blanco, pero no lo observáramos, no sabríamos que la ley es falsa. ¿Qué pasaría si observásemos una oruga amarilla?. ¿Podría servirnos para confirmar la ley que hemos enunciado?

Enunciemos la ley de esta otra forma *Todo objeto no-negro es no-cuervo.* Esta es la misma ley enunciada antes, porque tenemos una doble negación. Al ver la oruga amarilla, vemos que es un objeto no-negro, y que es un no-cuervo, por tanto, queda confirmada la ley *Todo objeto no-negro es no-cuervo* y, a su vez, queda confirmada la ley *Todos los cuervos son negros,* por ser leyes equivalentes. Por cada objeto no-negro que sea no-cuervo que observemos confirmamos las leyes enunciadas.

Por supuesto, estas confirmaciones son muy pequeñas, pues existen millones de objetos no-negros que son no-cuervos. Cuantos menos objetos hubiera, más se confirmaría la ley por cada objeto no-negro que sea no-cuervo. Sin embargo, siguiendo este razonamiento, se puede enunciar la ley *Todos los cuervos son blancos,* hallar la ley equivalente, *Todo objeto no-blanco es no-cuervo,* y encontrar confirmación de esta ley igual que con la otra. ¿Cómo es posible que los mismos objetos confirmen leyes opuestas?

Esta paradoja fue inventada por el profesor Carl G. Hempel[25] (1905-1997), y se la conoce como paradoja de Hempel.

Paradoja del verzul.

[25] Ver su "El método científico experimental" de 1966 en la traducción al español de Alianza Editorial, Madrid, 1982.

Sabemos que ciertos objetos cambian de color en cierto momento. Por ejemplo, las manzanas pasan de color verde a color rojo, el pelo encanece con la edad, etc. Llamemos verzules a los objetos que cumplan que sean verdes hasta fin de siglo, y que a partir de ese momento pasen a ser azules. Consideremos ahora las siguientes dos leyes:

- Todas las esmeraldas son verdes
- Todas las esmeraldas son verzules

¿Cuál de estas dos leyes está más confirmada?. Aunque no lo parezca, ambas leyes están igualmente confirmadas. Toda observación que se haga de una esmeralda será un ejemplo que confirme cada ley, y nadie ha observado jamás un contraejemplo. Sin embargo, la primera ley se acepta, pero la segunda no.

Esta paradoja fue enunciada por Nelson Goodman (1906-1998), y también se la conoce como paradoja de Goodman.

4. Paradojas Probabilísticas.

Paradoja de los dos loros.

Una persona tenía dos loros. Vino una visita y le preguntó: *"¿Es macho alguno de tus loros?*". El dueño le respondió que sí. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean machos?: un tercio.

Otro día vino otra visita y le preguntó: *"¿Es macho el segundo loro?".* El dueño le respondió que sí. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean machos ahora?: un medio.

¿Cómo es posible que preguntando por un loro en concreto la probabilidad de que ambos sean machos aumente de un tercio a un medio?

Veamos todas las posibilidades para ambas preguntas:

Primera pregunta	Segunda pregunta
MM	MM
MH	MH
HM	HM
HH	HH

= Los dos loros son machos
= Combinación no válida
= Los dos loros no son ambos machos

Se ve claramente que hay un acierto de tres combinaciones posibles para la primera pregunta, y un acierto de dos combinaciones para la segunda pregunta. Para la segunda pregunta, sabemos que los dos loros no pueden ser a la vez hembras, y además, sabemos que el segundo no puede ser hembra, con lo que tenemos dos casos imposibles de los cuatro que hay. Nos quedan otros dos, y de ellos, uno es la combinación macho-macho. Para la primera pregunta, sabemos que los dos no pueden ser hembras, pero no sabemos cuál de los dos es macho si el otro es hembra. Por tanto, tenemos tres casos posibles, y de ellos sólo uno es la combinación macho- macho.

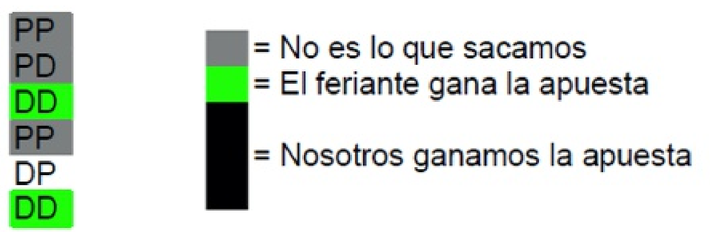
Paradoja de las tres cartas.

Éste es un juego de azar en el que la intuición y el sentido común fallan.

Un feriante nos propone un juego en el que hay tres cartas, con ases por ambas caras. La primera carta tiene una pica por ambos lados. La segunda tiene una pica en una cara y un diamante en la otra cara. La última carta tiene un diamante por ambas caras. El feriante nos explica que el juego consiste en que agita las cartas en su sombrero y nos deja coger una para ponerla sobre la mesa. Nos apuesta una peseta a que el palo de la cara oculta es igual que el de la cara visible. Supongamos que sacamos un diamante.

Para convencernos de que el juego es justo, el feriante nos explica que la carta extraída no puede ser la carta pica-pica. Por tanto, o bien es la carta diamante-pica, o bien es la diamante-diamante. En un caso, la cara oculta es un diamante, y en el otro, una pica. Así que las posibilidades de ganar son iguales para ambos. ¿Es correcto este razonamiento?

En realidad no. ¿Por qué? Porque en realidad hay tres casos posibles, y no dos. El primer caso es que la cara vista sea un diamante, y la cara oculta una pica. El siguiente caso es que la cara vista sea un diamante, y la cara oculta sea otro diamante. Y el tercer caso, quizá un poco difícil de ver, es que la cara vista sea el diamante, pero el de la cara inversa, y la cara oculta sea el diamante de la cara frontal. Es decir, que la carta diamante-diamante tiene dos caras y, por tanto, se puede ver una cara o la otra, pues aunque representen lo mismo, las caras son distintas. Puede llamarse a una cara *A* y a la otra B. Así, en un caso vemos la cara *A* y en otro caso vemos la cara B, que claramente son casos distintos.
Representemos las diferentes posibilidades:



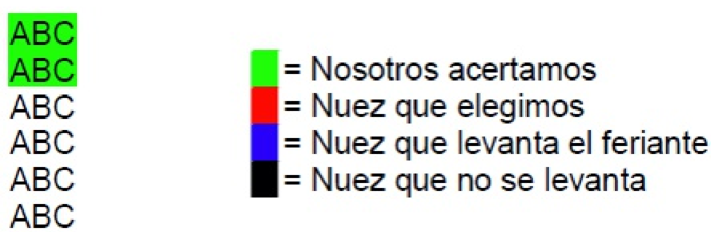
Cada cara de las cartas se diferencia en su color. Una es roja, la otra es negra.
Como puede verse, el feriante gana dos de cada tres apuestas, por lo que el juego no es justo.
Este juego de apuestas fue inventado por el matemático Warren Weaver (1894-1978), cofundador de la teoría de la información. Weaver presentó este juego en su artículo *"Probabilidad"*, en *Scientific American* de Octubre de 1950.

Paradoja de las tres nueces.
Esta paradoja es muy engañosa, pues es totalmente contraria a la intuición.
Tenemos el típico juego de la bolita y las tres nueces. Como todo el mundo sabe, el feriante esconde la bolita en una de las nueces, y remueve las tres nueces para despistarnos. Luego nos da a elegir una de las tres nueces para ver si acertamos dónde está la bolita. La apuesta está 2 contra 1.
Las probabilidades de acertar en este juego son de 1 vez de cada tres juegos, por lo que el juego no es justo. El feriante, que se da cuenta de nuestro descontento, cambia las reglas del juego. Nos propone que elijamos una nuez. Entonces él

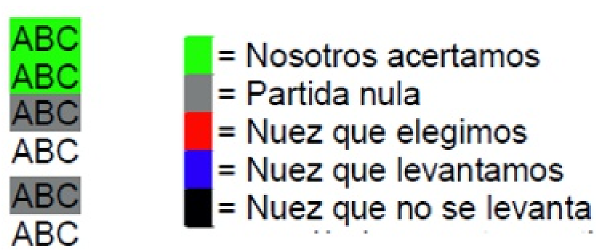
levanta otra nuez cualquiera de las dos que quedan, vacía, por supuesto, y nos argumenta entonces que una de las otras dos nueces tiene que estar vacía, y la otra contendrá la bolita, aumentando así nuestras probabilidades de acertar de 1/3 a 1/2 y, por tanto, haciendo justo el juego. La pregunta es: ¿el razonamiento del feriante es correcto?

No, no es correcto. El feriante siempre nos levantará una nuez vacía, porque sabe qué nueces están vacías. De esta forma, no nos da ningún dato útil que nos permita estimar la probabilidad de que la nuez elegida sea la correcta, porque una vez que elijamos una nuez, sabemos que al menos otra nuez de las dos estará vacía, y puede levantarla el feriante (por supuesto, una vez elegida una nuez por nosotros, ya no podemos volver a elegir otra nuez después de que el feriante levante la nuez, porque si no, sí que tendríamos una probabilidad entre 2 de acertar).

¿Por qué no aumentan las probabilidades de acertar? Veamos todas las posibilidades. Cada nuez tiene un nombre, y elegimos una de ellas. Suponemos que la bolita esté en la nuez *A.*



Se ve claramente que hay una probabilidad de 1 sobre 3 de acertar. ¿Qué pasaría si nosotros pudiéramos elegir qué nuez se levanta? Suponemos que si acertamos, declaramos la partida nula. ¿Qué probabilidades tendríamos de acertar? Ahora, aunque parezca que no, las probabilidades son de 1 cada 2 juegos. Veamos las posibilidades. Suponemos que la bolita está en la nuez *A*.



Como se ve, sólo hay cuatro partidas válidas, y de esas cuatro, en dos acertamos, y en dos fallamos. Por tanto, las probabilidades de acertar son de 1 cada 2 juegos.

Paradoja de los cuatro hijos

Un matrimonio deseaba tener cuatro hijos, y se preguntaban qué distribución de sexos es la más probable.

Hombre: Creo que será muy poco probable que tengamos a los cuatro hijos todos del mismo sexo.

Mujer: A lo mejor sólo tenemos un niño y tres niñas, o viceversa.

Hombre: O a lo mejor tenemos dos niños y dos niñas. El hecho de que nazca niño o niña es cuestión de cara o cruz. Así que lo más probable es que nazcan dos niños y dos niñas.

Aunque parezca que el hombre ha razonado correctamente, está equivocado. ¿Por qué? Dibujemos todas las posibilidades, distinguiendo cada combinación por un color:

Como se ve, la combinación de los elementos de color rojo es la más numerosa, es decir, la combinación de tres hijos de un sexo y uno del otro sexo es la más probable. Por tanto, en familias con cuatro hijos, es más probable encontrar tres niños y una niña, o tres niñas y un niño, que cualquier otra combinación. A veces ciertos razonamientos son engañosos.

Paradoja del ascensor

Ésta es otra extraña paradoja contraria a la intuición.
En un edificio hay un ascensor. Suponemos que los tiempos medios de parada del ascensor en cada planta son iguales. Un señor que vive en una de las últimas plantas está muy molesto porque la mayoría de las veces que toma el ascensor está subiendo, cuando él quiere bajar. Algo parecido le ocurre a otro vecino que vive en una de las primeras plantas del edificio. Este vecino normalmente quiere subir, pero casi todas las veces que toma el ascensor está bajando.
¿Cómo es posible que la mayor parte de los ascensores esté subiendo y a la vez bajando? La explicación se encuentra en que, para el vecino que vive arriba, sólo bajarán los ascensores que provengan de pisos superiores, y subirán los que provengan de pisos inferiores. Como hay menos pisos por encima del suyo que por debajo, hay menos probabilidad de que los ascensores bajen.
Lo mismo ocurre con el vecino que vive abajo, pero al revés. Sólo subirán los ascensores que estén por debajo de su piso, y bajarán los que estén por encima de su piso. Como hay menos pisos debajo del suyo que encima, habrá más posibilidades de que los ascensores bajen.
Esta paradoja apareció por primera vez en "Puzzle-Math", un libro del físico George Gamow (1904-1975) y de su amigo Marvin Stern, Viking Press, 1958.

Paradoja de los billeteros

Tres personas estaban cenando. La primera de ellas decide hacer un juego a las otras dos:
Persona 1: Os propongo un juego. Poned vuestros billeteros sobre la mesa. Contaremos el dinero que lleve cada uno. El que tenga menos dinero ganará todo el dinero que lleve el otro.
Los dos pensaron:
Persona 2: Vamos a ver. Si yo tuviera menos dinero que la otra persona, ganará todo el dinero que tengo. Sin embargo, si yo tuviera menos dinero que la otra persona, yo ganaré todo el dinero que ella tenga. Si pierdo, pierdo lo que tengo, pero si gano, ganaré más dinero del que tengo. Es decir, que puedo ganar más de lo que puedo perder. El juego está a mi favor.

Persona 3: A ver, en este juego, si tengo más dinero que la otra persona, perderé lo que tengo. Pero si tengo menos dinero que la otra persona, ganaré lo que tenga. Puedo ganar más dinero del que pueda perder. El juego está a mi favor.

¿Cómo es posible que el juego esté a favor de las dos personas? Se puede ver que el juego no favorece a ninguno de los dos, pero lo que no se ve es en qué falla el razonamiento de ambos.

Esta paradoja se debe al matemático francés Maurice Kraitchik (1882-1957), que la presenta en su libro “Mathematical Recreations”, New York: Dover, 1953, con corbatas en lugar de con billeteros.

Capítulo 7
Paradojas que envuelven logaritmos

La emergencia del significado del logaritmo de números complejos y negativos surge al comienzo de la decimoctava centuria en conexión con la integración. En analogía con el caso real, Johan Bernoulli integró $1/(x^2+a^2)$ como sigue

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{(x+ai)(x-ai)} = \frac{1}{2ai}\int \left(\frac{1}{x+ai} - \frac{1}{x-ai}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2ai}[\log(x+ai) - \log(x-ai)] = -\frac{1}{2ai}\log\frac{x+ai}{x-ai}$$

En un intercambio de cartas (comenzó en 1702 y se prolongó 16 meses) Bernoulli y Leibniz argumentaron sobre el significado de

$$\log\frac{x+ai}{x-ai}$$

y, en particular, sobre el significado de log (-1). Bernoulli aseguró que log (-1) es real mientras que Leibniz afirmaba que era imaginario, y cada uno de ellos presentó varios argumentos para soportar sus puntos de vista. Por ejemplo, Bernoulli argumentaba, puesto que

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}, \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x}$$

por tanto, log x = log (-x). En particular, log (-1) = log (1) = 0. Por otra parte, los argumentos de Leibniz fueron los siguientes:

i) Puesto que la imagen de log a, para a>0, es R, se sigue que log a, para a<0, debe ser imaginario, pues los números reales han sido "cubiertos".

ii) Si log (-1) fuera real, entonces log i también lo fuera, puesto que

$$\log i = \log(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(-1)$$

Lo cual es claramente absurdo, alega Leibniz.

iii) Poniendo x = -2 en el desarrollo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

nos da

$$\log(-1) = -2 - {}^{4}/_{2} - {}^{8}/_{3} \ldots$$

Puesto que la serie de la derecha diverge, no puede ser real, por tanto es imaginario.

Los anteriores ejemplos son una muestra del arte (no digamos ciencia) de la manipulación simbólica practicada por algunos de los más grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII, lo que resultó una paradoja *"que por un largo tiempo ... me atormentó''* como notó Euler[26]. El resolvió dicha situación en un trabajo de 1749, del que tomamos la siguiente introducción[27]:

"Puesto que los logaritmos son parte de la matemática pura, puede sorprendernos saber que ellos hasta ahora han sido temas de embarazosas

[26] En P. Marchi-"The controversy between Leibniz and Bernoulli on the nature of the logarithms of negative numbers", In Akten das II Intern. Leibniz-Kongress (Hanover, 1972), Bnd II, 1974, pp.67-75, específicamente p. 72.

[27] Ver Leapfrogs-Ob. Cit., p.4.

controversias en las cuales las contradicciones parecen imposibles de resolver. Mientras tanto, si la verdad es universal, no puede haber dudas que estas contradicciones no obstante sin resolver, pueden ser solo aparentes... Yo pondré completamente en evidencia todas las contradicciones envueltas para poder ver cuán difícil es descubrir la verdad y protegerse contra las inconsistencias, incluso cuando dos grandes hombres están trabajando en el problema".

La clave de la solución de Euler fue la Fórmula de Euler-Cotes

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

lo que implicó que

$$e^{i(\pi+2n\pi)} = \cos(\pi + 2n\pi) + i\sin(\pi + 2n\pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

de donde

$$\log(-1) = i(\pi + 2n\pi)$$

donde n=0, ±1, ±2, ±3,...

Así, el logaritmo es *multivaluado* (de hecho, infinitovaluado) y todos sus valores son complejos. Tanto Bernoulli como Leibniz estaban equivocados, el primero "más" que el último.

Capítulo 8
Paradojas que envuelven funciones

El concepto de función se originó en la primera mitad del Siglo XVIII. Newton y Leibniz crearon el Calculus en la segunda mitad del siglo anterior. Por tanto, tenemos la siguiente Metaparadoja: El desarrollo del Calculus sin funciones. El Calculus de Newton y Leibniz fue un cálculo de curvas (dadas por sus ecuaciones) más que de funciones. Una función fue vista diferentes veces como una fórmula, una curva, una correspondencia arbitraria, etc. Las paradojas fueron destruyendo uno u otro punto de vista, incluso el mismo significado de una fórmula que se transforma en un cierto plazo, era a menudo el tema de considerables controversias. Por ejemplo:

a.- Para Euler y sus contemporáneos de la mitad del Siglo XVIII una función era una fórmula, aún cuando este concepto no estaba rigurosamente definido, fue interpretada ampliamente para permitir (entre otras cosas) sumas y productos infinitos en su formación. Pero, ¿qué es una fórmula?. La cuestión no es tan inocente como parece ...

Por ejemplo, mientras que la expresión

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

era considerada una fórmula, pero

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

no. Una fórmula (función) tenía que estar dada por una única expresión. Además, la variable independiente debía tener como rango **R** (excepto, posiblemente, para algunos puntos aislados, como $f(x) = x^{-1}$), así $f(x) = x$, para $0 < x < 1$, no era considerada una función.

Tales restricciones sobre las fórmulas, eran necesarios pues los algoritmos de la época, no se aplicaban a una clase de funciones ampliamente "construida".

Muchos de los errores y falsas concepciones del Siglo XVIII, fueron cubiertos por los trabajos de Fourier y Cauchy de principios del siglo siguiente. Por ejemplo, Cauchy mostró que

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

podía expresarse como

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + t^2} dt$$

lo cual es un ejercicio muy fácil, lo cual tornó irrelevante, el hecho de que una función estuviera dada por una o más expresiones. También convirtió en legítimo e importante, considerar funciones cuyo dominio fuera un intervalo y no todo R.

b.- En un paper de 1829 sobre Series de Fourier, Dirichlet introdujo la así llamada Función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & si\ x\ es\ racional \\ 0, & si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

la cual posee una fórmula y no una curva que la represente. Ella representa un nuevo tipo de función, descrita por una correspondencia. Ella fue la primera de una serie de muchas funciones que se convirtieron en patológicas, aunque no por mucho tiempo[28].

[28] Ver K. Volkert-"Die Geschichte der pathologischen Funktionen-Ein Beitrag zur Enstehung der mathematischen Methodologie", Arch. Hist. Ex. Sc. 37(1987), 193-232.

A finales del Siglo XIX, Baire extendió (de nuevo) la noción de fórmula. Para él, la fórmula era una expresión formada por variables y constantes (posiblemente numerablemente) e iteración de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones y paso al límite. El llamó a una tal expresión, una función analíticamente representable (i.e., una fórmula) y mostró que las funciones de Dirichlet del tipo

$$D(x) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \cos(m! \pi x)^n$$

eran de esa familia. Así, la patológica Función de Dirichlet, se transformó en una función "doméstica", analíticamente representable. ¿Es toda función analíticamente representable?, o sea, ¿toda función puede ser dada por una fórmula (a la Baire)?. Sí y No. Si Ud. es un formalista, Ud. puede mostrar por una argumento continuo, que el conjunto de funciones analíticamente representables posee cardinal c, mientras que el conjunto de todas las funciones (claramente) posee cardinal 2^c. Así, existen innumerables funciones que no son analíticamente representables. Hasta ahora no se ha dado un ejemplo constructivo de esto.

¿Cómo podemos definir funciones en el aula? ¿Cuándo? Me parece que el significado de función puede ser cambiado, mejor dicho, precisado a lo largo del currículum escolar y esto debe reflejarse en la enseñanza. Parece tener un buen sentido pedagógico definir una función inicialmente como una fórmula y posiblemente después (¿cinco años después?) como un conjunto de pares ordenados. Dando definiciones tentativas, las que requieran revisiones y adaptaciones a las circunstancias, lo cual es una práctica que debe ser ponderada. Pero antes de que cualquier definición de función sea dada, los estudiantes deben adquirir un "instinto de funcionalidad", a partir de variados ejemplos que más tarde serán llamados funciones. Este es el orden histórico de desarrollo y aconsejaría a los profesores seguirlo.

Capítulo 9
Paradojas que envuelven nociones del Cálculo.

a.- Newton y Leibniz inventaron (independientemente) el Calculus en el último tercio del Siglo XVII. Pero muchas de esas ideas fueron esbozadas al comienzo de dicho siglo en el trabajo de notables matemáticos, principalmente Fermat. A finales de la década del 30 él desarrolló un método para resolver problemas de tangentes y de máximos y mínimos. El siguiente ejemplo, ilustra la aproximación de Fermat[29]. Supongamos que deseamos encontrar la tangente a la parábola $y = x^2$ en cierto punto (x , x^2). Para los estudiantes de hoy en día, esto es un ejercicio rutinario, pero para los matemáticos del Siglo XVII era una formidable tarea.

Fermat situó un punto $x + d$, cercano en el eje x al punto x, y llamó s a la subtangente de la curva en (x, x^2). Dada la similitud de los triángulos, obtenemos que

$$\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+d}$$

Femat notó que k es "aproximadamente igual" a $(x + d)^2$, escribiendo $k \approx (x + d)^2$ obtenemos

$$\frac{x^2}{s} = \frac{(x+d)^2}{s+d}$$

Resolviendo para s tenemos que

$$s = \frac{x^2}{2x+d}$$

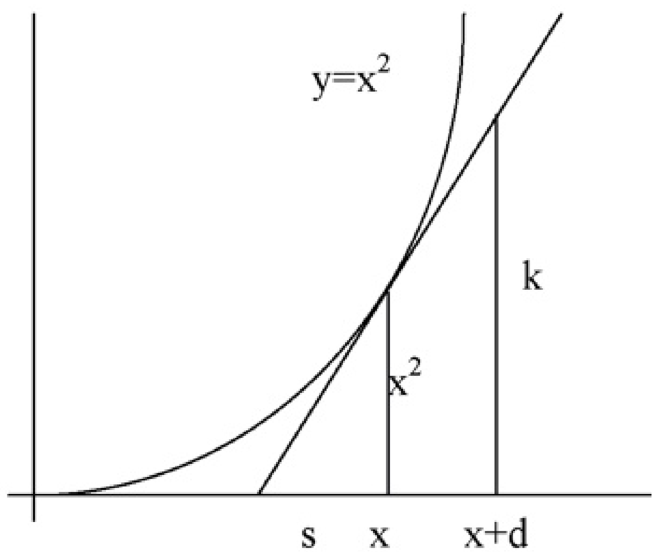
por tanto

[29] C. H. Edwards-"The historical development of the calculus", Springer-Verlag, 1979, p. 122.

$$\frac{x^2}{s} \approx 2x + d$$

Note que x^2/s es la pendiente de la tangente a la parábola en (x, x^2). Fermat "borró" d y afirmó que la pendiente de la tangente es 2x.

El Método de Fermat, fue severamente criticado por algunos de sus contemporáneos. Ellos le objetaron que la introducción y posterior "supresión" del misterioso d. Dividiendo por d significa que esta cantidad no es cero, pero su desaparición implica considerarlo como cero. Eso es inadmisible, clamaban. Por supuesto, "el misterioso d" de Fermat contenía una idea crucial, el incremento ("pequeño") de una variable. Estas inconsistencias en tiempo de Fermat, llevaron a la construcción del Calculus sobre bases sólidas.



La justificación de sus contemporáneos, era que los algoritmos del Calculus, arrojaban resultados correctos -otro importante ejemplo de la utilidad de procedimientos "sin sentido". El fin justificaba los medios. La rigurosa justificación del Calculus -al menos de un tipo- tuvo que esperar hasta 1821 con la introducción de los límites por Cauchy y -de otro tipo- hasta 1964 con la introducción de los números no estándares (los infinitesimales de Leibniz) por parte de Robinson. Así tenemos la siguiente Metaparadoja: ¿Cómo pudo ser fundado el Calculus sobre dos teorías, distintas y en cierto sentido incompatibles: la teoría de límites, basada sobre la noción de número real, y la teoría de los infinitesimales, basada sobre los números no estándar? O, como puntualiza Steen "La fundación epistemológica del análisis matemático estaba lejos de ser establecida[30].

b.- Las series de potencias fueron una potente herramienta en el Calculus del Siglo XVII -y especialmente en el Siglo XVIII. Ellas fueron manipuladas como polinomios, con poca atención a las cuestiones de convergencia. De hecho, Euler y muchos otros matemáticos de la época, usaron series divergentes, o al menos series que tenían un intervalo de convergencia determinado[31], con gran ventaja. Los resultados así obtenidos fueron impresionantes e importantes, pero errores y paradojas se tornaron inevitables. He aquí un ejemplo.

Pongamos x=1 en el desarrollo en serie de potencias de la función logarítmica

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

así obtenemos que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$$

que hasta ahora parece bueno, pero el miembro derecho es igual a

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\right) = 0$$

---

[30] L. Steen-"New models of the real-number line", Sc. Amer. 225 (Aug. 1971), 92-99.

[31] Recordemos la Inducción Euleriana como principal exponente.

por tanto, log 2 = 0. Solo a mediados del Siglo XIX fue que Riemann resolvió esta paradoja probando que la suma de una serie condicionalmente convergente puede tomar, después de un reordenamiento de sus términos, cualquier valor. "El descubrimiento de esta aparente paradoja contribuyó esencialmente a reexaminar y a una fundamentación rigurosa... de la teoría de series infinitas[32].

De nuevo tenemos un "argumento por analogía", el uso de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva a expresiones infinitas que llevaron a estas paradojas. El anterior es un buen ejemplo para impresionar a los estudiantes sobre la necesidad de tomar precauciones en el uso de procesos infinitos.

[32] Ver R. Remmert-"Theory of complex functions", Springer-Verlag, 1991, p. 30.

Capítulo 10
Paradojas Geométricas

Paradoja de Einstein.

Esta es una paradoja propuesta por Albert Einstein a raíz de su famosa teoría de la relatividad.

¿Qué pasaría si lanzáramos al espacio una nave espacial en línea recta? ¿Se alejaría siempre más y más de nosotros? Albert Einstein sugirió que podía ser que no, que podía ocurrir que la nave regresara a la Tierra.

¿Cómo es posible esto? Albert Einstein propuso la posibilidad de que nuestro universo esté curvado en la cuarta dimensión, formando una superficie curva cerrada sobre sí misma.

Para entender esto, supongamos que somos seres de dos dimensiones, y que vivimos sobre un plano. Si el plano es ilimitado, al viajar en línea recta siempre nos alejaremos de nuestro punto de partida. Pero si el plano fuese una esfera, al viajar en línea recta llegaría un momento en que nos encontraríamos de vuelta a nuestro punto de partida. Paradoja del punto fijo.

Esta paradoja es muy curiosa. Consiste en lo siguiente:

Una persona comienza a caminar por un sendero que lleva a la cima de un monte a las siete de la mañana, y llegó a la cumbre a las siete de la tarde de ese mismo día. Tras pasar la noche en la cima, partió a las siete de la mañana del día siguiente de vuelta por el mismo camino. Esta persona se preguntaba si pasaría por un punto del camino a exactamente la misma hora en que pasó el día anterior al subir. Esta persona reflexionaba:

Ayer al subir llevaba una velocidad variable e hice algunos descansos. Hoy al bajar, llevo distinta velocidad y los descansos los hago a distintas horas, así que no puedo pasar por un punto a la misma hora en que pasé ayer.

Sin embargo, esta persona estaba equivocada. ¿Por qué? Si superponemos el día anterior con el día actual, veríamos a la persona subir y bajar el camino a la vez. Puesto que empezaron a la misma hora, está claro que en algún punto se encontrarán, y en ese punto coincidirá la hora de los dos días. Por tanto, sí existe un punto en el que coincidirá a la misma hora que en el día anterior.

Paradoja del cazador y la ardilla[33]

Esta paradoja, como su nombre lo indica, involucra a un cazador y una ardilla. La ardilla está sobre un tocón, y el cazador a una cierta distancia del tocón. El cazador va rodeando el tocón, y mientras lo rodea, la ardilla va girando sobre sí misma sin perder de vista al cazador. Cuando el cazador haya dado una vuelta completa alrededor del tocón, ¿habrá dado una vuelta en torno a la ardilla?

Cazador: Puesto que la ardilla está sobre el tocón, como he dado una vuelta alrededor del tocón, forzosamente habré dado una vuelta alrededor de la ardilla.

Ardilla: El cazador sólo me ha visto de frente. No me ha visto la espalda, por tanto, no ha dado una vuelta alrededor de mí.

¿Quién de los dos tiene razón? A primera vista, ambos tienen razón, pero esto no puede ser, porque o bien el cazador da una vuelta alrededor de la ardilla, o bien no la da, pero no las dos cosas a la vez.

El problema radica en la definición de la palabra "rodear". Según cómo se defina, así tendrá uno u otro razón. Otra paradoja parecida es la que surge al contemplar la Luna. Puesto que siempre vemos su cara, cuando la Luna da una vuelta alrededor de la Tierra, ¿habrá dado la Luna una vuelta sobre sí misma?

Vista la Luna desde otro planeta distinto a la Tierra, se la vería dar una vuelta alrededor de su propio eje.

Vista la Luna desde la Tierra, puesto que no la vemos por todas partes, sino sólo por una mitad, podemos decir que la Luna no da una vuelta sobre su eje cada vez que da una vuelta alrededor de la Tierra.

Aquí está de nuevo envuelto el significado de una palabra, en este caso, "revolución". Sin embargo, ésta ya no es una paradoja, pues el péndulo de Foucault situado en la Luna permite constatar que sí da una vuelta alrededor de su eje.

[33] Consultar Yakov I. Perelman-"Matemáticas Recreativas", Editorial Mir, Moscú, 1968.

Capítulo 11
Paradojas que envuelven descomposición de objetos geométricos.

Teorema.

Un frijol y el Sol son equidescomponibles. O sea, el frijol puede ser cortado en muchas partes[34] las que pueden ser reorganizadas para obtener el Sol (aquí el volumen no es importante).

Esta es la célebre Paradoja de Banach-Tarski de 1924[35]. Por supuesto, las partes o piezas en las cuales el frijol se descompone no son medibles; o sea, no tienen volumen. No son del tipo de piezas que pueden ser obtenidas mediante tijeras u otro utensilio de corte, ellas son obtenidas por medio del Axioma de Elección. Metaparadoja: ¿Cómo mediante consideraciones simples (por ejemplo, el Axioma de Elección) se pueden obtener tan formidables consecuencias (digamos la Paradoja de Banach-Tarski).

Por supuesto, el Axioma de Elección no es una consideración simple después de todo[36], ha provocado no pocas discusiones, de hecho la aceptación o no de éste, marca en la Epistemología Matemática, una importante división entre los matemáticos. La Paradoja de Banach-Tarski puso de relieve la discusión de la legitimidad de dicho axioma, como puntualiza Moore

> *"Muchos matemáticos consideran que la Paradoja de Haussdorf y su sucesora, la Paradoja de Banach- Tarski son suficientes razones para ser cuidadosos con el Axioma (de Elección)''*.

No obstante, pudo haberle sido muy útil a los Délicos de la antigüedad griega"[37].

En mis cursos, usualmente les pregunto a los estudiantes si puede construirse una figura infinita con área finita. No importa si han recibido o no Calculus, es una situación que rompe sus esquemas mentales pues vincula dos nociones que para

---

[34] Fue demostrado en los años 40 que cinco pedazos son suficientes; de hecho, ningún número menor de cinco funciona.
[35] Consultar S. Wagon-"The Banach-Tarski paradox", Cambridge University Press, 1985.
[36] Ver, entre otros el muy completo G. H. Moore-"Zermelo's axiom choice: a chapter its origins, development, and influence", Springer-Verlag, 1982.
[37] Ver S. Wagon-Ob. Cit., p.v.

ellos son opuestas infinito vs. Finito. Espero que a los lectores no les sea difícil obtener la respuesta, de hecho existen infinitos ejemplos afirmativos[38].

Al final, el círculo fue cuadrado. Esto no es una broma. Es el título de un trabajo publicado en Notices of the American Mathematical Society[39]. En 1988 el matemático húngaro Laczkovich mostró que el círculo puede ser descompuesto en infinitas piezas, las cuales pueden ser reemsambladas para obtener un cuadrado de igual área[40]. Pero las piezas no son medibles (ninguna posee área) y la descomposición está asegurada en virtud al Axioma de Elección.[41]

---

[38] Probablemente el ejemplo más sencillo es descomponer un cuadrado unitario y obtener una figura infinita cuya área $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ es evidentemente uno.

[39] R. J. Gardner and S. Wagon-"At long last the circle has been squared", Notic. Amer. Math. Soc. 36(1989), 1338-1343.

[40] Miklós Laczkovich-"Von Neumann's Paradox with Translation", Fund. Math. 131, 1-12, 1988. Consulte además del mismo autor "Conjeture and Proof", Mathematical Association of América, 2001 y "The solution of Tarski's "circle-squaring" problem and the present status of some related questions", 27 KAM Mathematical Colloquium, Oct 29, 1996, Charles University, Praha, Cezch Republic.

[41] Ver Gardner y Wagon-Ob. Cit.

Capítulo 12
Paradojas Temporales

Paradoja de la cuerda elástica

Ésta es una paradoja que a más de uno le hará romperse la cabeza.

Supongamos que tenemos una cuerda elástica de un kilómetro de largo, y que en uno de sus extremos se encuentra una oruga. Esta oruga avanza por la cuerda a razón de un centímetro por segundo. Cuando pasa un segundo, la cuerda se estira un kilómetro, para llegar a medir dos kilómetros. Cuando pasa otro segundo, la cuerda se estira de nuevo otro kilómetro, para medir ahora tres kilómetros, y así sucesivamente. Cada segundo la cuerda se estira un kilómetro. La pregunta es: ¿llegará a alcanzar la oruga el otro extremo de la cuerda? Aunque la intuición diga que la oruga nunca alcanzará el otro extremo, en realidad sí lo alcanzará. Claro que tardará mucho en hacerlo.

Para quien no se lo crea, realicemos el análisis que nos lo confirme. Como la cuerda se estira, en cada estiramiento hará avanzar a la oruga de forma proporcional a lo que se estire la cuerda. Como en un kilómetro hay 100.000 centímetros, en el primer segundo la oruga habrá avanzado 1/100.000 de cuerda. Al estirarse la cuerda, la oruga avanza de forma proporcional al estiramiento, por lo que sigue en 1/100.000 de cuerda. En el siguiente segundo, la oruga avanzará otro centímetro. Ahora la cuerda mide 200.000 centímetros, por lo que avanzará 1/200.000 de cuerda, a sumar al anterior 1/100.000 de cuerda. La cuerda se vuelve a estirar, y la proporción de cuerda avanzada por la oruga se mantiene al ser arrastrada en el estiramiento. Ahora la cuerda mide 300.000 centímetros. La oruga avanza otro centímetro, por lo que ahora recorre 1/300.000 de cuerda, a sumar al 1/100.000 más al 1/200.000. La cuerda se estira otro kilómetro, y la proporción de cuerda avanzada por la oruga se mantiene al ser arrastrada en el estiramiento. Y se sigue así, obteniendo una proporción de cuerda recorrida de

$$1/100.000 + 1/200.000 + 1/300.000 + ... + 1/(k*100.000)$$

o lo que es lo mismo

1/100.000 (1/1 + 1/2 + 1/3 +... + 1/k).

La oruga alcanzará el extremo de la cuerda cuando la fórmula anterior sume 1, que es equivalente a recorrer el total de la cuerda. La serie encerrada en el paréntesis es la denominada serie armónica. La suma de la serie armónica puede hacerse tan grande como se desee, por tanto, llegará a valer 100000, que sería el recorrido total de la cuerda.

Sabemos que esta serie puede valer lo que queramos, porque si sumamos los términos que van de 1/1 a 1/2n, su valor supera a n * 1/2 = n/2. Por tanto, sumando los términos que van de 1/1 a 1/2.200.000, sabemos que superamos el valor 200.000/2 = 100.000, es decir, superamos el extremo de la cuerda. El tiempo necesario para alcanzar el otro extremo sería inferior a 2.200.000 segundos, que es un número con 60206 cifras.

Paradoja de la lámpara de Thompson

Esta paradoja pertenece a las paradojas denominadas tareas sobrehumanas. Se la denomina paradoja de la lámpara de Thompson en recuerdo de James F. Thompson, que fue el primero en escribir respecto de esta paradoja[42].

Tenemos una lámpara, que la mantenemos encendida durante un minuto. Luego la apagamos durante medio minuto. Después, la encendemos durante un cuarto de minuto, y así sucesivamente, encendemos y apagamos la lámpara durante intervalos de tiempo que se reducen a la mitad en cada encendido o apagado de la lámpara. En total, transcurren dos minutos. La pregunta es ¿Estará encendida o apagada la lámpara?

Si numeramos cada intervalo de tiempo como 1, 2, 3,..., n, entonces observamos que en cada intervalo impar la lámpara está encendida, y en cada intervalo par la lámpara está apagada. Responder a la pregunta de si la lámpara acabará encendida o apagada es equivalente a preguntarnos si el último número natural es par o impar, cosa imposible de responder, porque no existe el último número natural.

[42] Ver G. W. Erickson and J.A. Fossa-"Dictionary of Paradox", Lanham, MD: University Press of America, pp. 106-107, 1998 y C. A. Pickover-"Keys to Infinity", New York: Wiley, pp. 19-23, 1995.

Sabemos que los dos minutos transcurren, pero no sabemos cómo acabará la lámpara.

El filósofo Max Black (1902-) presentó una variante de esta paradoja. Su paradoja consiste en dos bandejas, A y B, una bolita situada en la bandeja A, y una máquina que puede transportar la bolita de una bandeja a la otra. En un minuto, la máquina transfiere la bolita de la bandeja A a la B. En medio minuto transfiere la bolita de la bandeja B a la A, en un cuarto de minuto la transfiere de la A a la B, y así sucesivamente, reduciendo cada intervalo de tiempo a la mitad. Al final de los dos minutos, ¿en qué bandeja se encontrará la bolita?

Paradoja del perro.

Esta paradoja también pertenece a la clase de las tareas sobrehumanas.

Tenemos dos personas A y B, que distan de sí un kilómetro, y un perro. Este perro está al principio con A. Ambas personas se aproximan a una velocidad de 2 km/h. El perro va de una a otra a una velocidad de 8 km/h. Suponemos que los giros son instantáneos. Cuando A y B se encuentren, ¿hacia quién mirará el perro?

Esta pregunta es imposible de responder. Sin embargo, sí podemos saber qué distancia recorre el perro. Si A y B se acercan a una velocidad de 2 km/h cada uno, cada uno anduvo medio kilómetro, con lo que tardaron en juntarse 0.5 km/2 km/h = 0.25 h. Si el perro se movía de uno a otro a 8 km/h, recorrió

$$0.25\ \text{h} * 8\ \text{km/h} = 2\ \text{km}$$

Supongamos que A y B comienzan a alejarse el uno del otro, y el perro sigue llendo de uno a otro, ¿en dónde acabará el perro cuando lleguen a alejarse un kilómetro?. Pues en realidad podrá estar en cualquier sitio. ¿Por qué? Si retrocedemos en el tiempo, veremos que el perro, independientemente de dónde estuviera, acabará en el punto de reunión de A y B.

Paradoja de los relojes

Tenemos dos relojes. Uno de ellos está parado, y el otro atrasa un minuto diario. ¿Cuál de los dos da mejor la hora?

El reloj que está parado da la hora exacta dos veces al día, mientras que el otro la dará una vez cada 720 días. ¿Cuál elegiríamos para saber la hora?

Esta paradoja la presentó en sus cuentos Lewis Carroll, nombre literario de Charles L. Dodgson, profesor de matemáticas en Christ Church, uno de los colegios de la Universidad de Oxford, en Inglaterra. En particular la uso en mis clases de Modelos Numéricos, como un ejemplo práctico y común de la importancia intuitiva de la Teoría de la Aproximación.

Paradoja de los taquiones

Los taquiones son partículas hipotéticas que los físicos creen que podrían existir. Estas partículas viajarían a una velocidad superior a la de la luz. De ser así, y por la teoría de la relatividad de Einstein, al desplazarse remontarían el tiempo.

Imaginemos que los taquiones existen, y que al viajar pueden remontar el tiempo. Si pudiéramos generarlos, controlar su intensidad y detectarlos, podríamos hacer un teléfono con ellos. Pero sus características generarían paradojas.

Supongamos que remontan una hora para comunicarnos con alguien. ¿Qué ocurriría? Si preguntásemos que qué tal de tiempo hace al que llamamos, recibiríamos su respuesta una hora antes, cosa imposible, pues todavía no hemos hecho la pregunta, ni siquiera la llamada.

Paradojas de las máquinas del tiempo.

Estas son, a mi parecer, las más interesantes paradojas del tiempo.

¿Qué ocurriría si inventásemos una máquina del tiempo? En muchas novelas y películas se trata esta hipotética máquina. En algunas hasta se plantean las paradojas, en otras no.

Imaginemos que viajamos al pasado, y nos encontrásemos cuando éramos niños. ¿Qué pasaría si matáramos al niño? ¿Dejaríamos de existir? Si nos asesinamos de niños, no podemos existir para viajar al pasado y asesinarnos.

Ahora imaginemos que viajamos al futuro. Podemos dejar un legado de nuestra presencia, por ejemplo, podemos grabar nuestras iniciales en un árbol. Ahora regresamos al presente, y vemos el árbol en el que grabaremos nuestras iniciales en el futuro. Si ahora talamos el árbol, ¿cómo podremos grabar nuestras iniciales en ese árbol en el futuro? ¿De dónde salió el árbol en el que grabamos las iniciales, si lo hemos talado?

Supongamos que vamos a realizar un experimento. Pensamos en enviar dentro de una hora un papel con un mensaje para hacerlo retroceder media hora. Cogemos el papel y lo escribimos. Después de media hora, abrimos la máquina del tiempo y, efectivamente, ahí está el papel con el mensaje. El experimento es un éxito. ¿Pero qué ocurriría si el papel original lo quemamos? Ya no tendríamos papel que enviar, salvo la copia encontrada en la máquina. Tenemos un papel que ha salido de la nada. ¿Desaparecería? Si también quemamos la copia, no tendríamos papel que enviar al pasado.

Analicemos estas paradojas en más detalles.

Paradojas generadas por los viajes en el tiempo

El viaje en el tiempo plantea una serie de interesantes paradojas que pueden agruparse básicamente en los siguientes dos tipos[43] (véase el recuadro "Películas y series televisivas sobre viajes en el tiempo").

---

[43] A modo de completitud, presentamos las películas y series televisivas sobre viajes en el tiempo, más destacadas en los últimos años. Desde la publicación de la novela de Wells, realmente adelantada a su época, la idea de viajar por el tiempo ha fascinado a los seres humanos. La década de 1960 se caracterizó por una postura determinista. En la serie Time Tunnel ("El Túnel del Tiempo", 1966-67), los físicos Anthony Newman y Douglas Phillips, viajando a la deriva por el tiempo, permiten rememorar leyendas y hechos verídicos de la historia sin que estos puedan ser modificados (conjetura de consistencia de Novikov). Igual determinación se adopta en algunos de los episodios de la famosa serie Star Trek ("Viaje a las Estrellas"). En 1968 se produce el estreno del éxito cinematográfico Planet of the Apes ("El Planeta de los Simios"). En esta historia, un astronauta es transportado hacia el futuro del planeta Tierra, cuando la especie humana se encuentra dominada por simios parlantes. El determinismo en esta historia es algo insólito, pues según se desprende del argumento es imposible cambiar el curso de los hechos, sin embargo, estos necesitan de una situación no- cronal, dado que es un mono proveniente del futuro quien enseña el lenguaje a los monos de nuestra época (paradoja de "creación a partir de la nada"). La "paradoja del matricidio" es la base del argumento de los filmes The Terminator (1984) y su continuación Terminator 2: Judgement Day (1991). Después de un holocausto nuclear en 1997, los robots entran en conflicto con los humanos sobrevivientes. En la primera parte, las máquinas envían a un androide hacia el pasado, a un fatídico encuentro destinado a asesinar a la progenitora del futuro líder de la resistencia humana, para tratar de evitar que este nazca. Al no tener éxito, en la segunda parte, intentan asesinar directamente al líder cuando todavía era un niño. Si bien el determinismo parece caracterizar la primera historia, un gran giro se produce en la segunda parte de la saga, donde el pasado es modificado para cambiar un oscuro futuro de la humanidad dominada por máquinas. En la trilogía de Robert Zemeckis Back to the Future
("Volver al Futuro"), dirigida a una audiencia más joven, se discuten estos temas en un tono más humorístico. El mensaje que engloba a estos tres largometrajes es que, alterando hechos del pasado, el futuro puede cambiar. Al respecto, una decisión interesante deben tomar los personajes de Galáctica (capítulo Piloto 1980). En esta serie, la raza humana está a punto de ser exterminada por los Cylones y un método sugerido para revertir tal situación es enseñar a los científicos de la Alemania nazi cómo perfeccionar los cohetes V2, para lograr acelerar el avance de la civilización, a riesgo de que estos triunfen en la Segunda Guerra Mundial. En las producciones de la década del sesenta nunca se explicaba claramente el mecanismo físico capaz de generar viajes por el tiempo. Un mecanismo que utiliza la propulsión mediante la distorsión del espacio-tiempo por campos gravitatorios es mencionado por primera vez en los cálculos llevados a cabo por el Sr. Spock (un personaje central de la primera versión de Star Trek) para transportar a la nave Enterprise a través del tiempo (Star Trek, episodio Tomorrow is Yesterday). Sin embargo, el modelo estaba bastante alejado de la concepción actual de una máquina del tiempo, ya que utilizaba como fuente de impulsión el débil campo gravitatorios del Sol. Una propuesta ingeniosa a fin de evadir tecnicismos

Paradojas de consistencia: Se trata de aquellas del tipo "el viajero mata a su madre antes de que él mismo nazca''. Este tipo de paradojas requiere que el viajero pueda actuar sobre el pasado cambiándolo.

Paradojas de creación a partir de la nada: En este caso, un viajero vuelve al pasado con, por ejemplo, la versión final de este artículo y nos lo entrega antes de que sea escrito. Luego, nosotros, en el pasado, no necesitamos escribir el artículo, ya que poseemos la versión final. Pero alguien tuvo que haberlo escrito, y si no fuimos nosotros, ¿quién, entonces, escribió este artículo?

Se han propuesto cuatro conjeturas distintas que evitarían las paradojas.

La conjetura radical: La física debe reescribirse en su totalidad para dar cuenta de la posibilidad práctica de realizar viajes en el tiempo.

La conjetura de consistencia de Igor Novikov: Los viajes en el tiempo están permitidos pero la historia del universo es única, y no es posible modificar lo que ya ha sucedido. Dicho de otra forma, las únicas leyes de la física que pueden existir localmente en el universo son aquellas que son consistentes en forma global (si el viajero fuera a matar a su madre en un instante previo a su nacimiento, esta conjetura demanda que el intento fracase).

---

se muestra en la película Superman: the movie (1978). A diferencia de los demás viajeros del tiempo, Superman es el único con la habilidad para transformarse a sí mismo en una máquina del tiempo. Volando a velocidades superlumínicas, es capaz de romper la barrera de la luz para resucitar a Louise Lane y torcer el curso de la historia. Los primeros indicios de la estructura que hoy conocemos como agujero de gusano llegan al cine en 1984 en Philadelphia Experiment. Esta historia está basada en supuestas pruebas secretas realizadas en 1943 por la Marina de EE.UU., para lograr un sistema de camuflaje que pudiese hacer invisibles a los barcos americanos para el radar enemigo. La prueba final que resulta en la cancelación del proyecto envía a los tripulantes del destructor Eldridge hacia 1984 a través de una especie de túnel generado por densidades de energía negativa. Sin embargo, es en el último film de Robert Zemeckis, Contact (1997), en donde se utiliza la concepción científica actual de agujero de gusano. En esta película, la Dra. Eleanor Arroway se convierte en la primera viajera interestelar que utiliza un agujero de gusano artificialmente construido siguiendo instrucciones de origen extraterrestre. Los agujeros de gusano, de existir, ofrecerían la fascinante posibilidad de realizar viajes interestelares hacia las regiones más recónditas de nuestro Universo. Este hecho es explotado por los guionistas de las series de los '90 Deep Space Nine y Babylon 5. Más aún, permitirían viajes a nuevos universos e incluso movernos en la dimensión temporal. Los episodios de la serie Sliders ("Deslizadores"), en la que sus personajes se deslizan a través de túneles hacia copias similares de nuestro Universo (infinitas trayectorias probables para las partículas) reflejan bastante bien la estructura de un Universo que admite la existencia de CTC. Sin embargo, al igual que en la novela de Wells, la necesaria dosis de suspenso y una trama bien lograda (sin importar los detalles técnicos de la máquina del tiempo) parecen ser los detonantes del éxito en las novelas de ciencia ficción. Tal vez esto justifique el hecho de que en la película Sphere, se utilice -erróneamente- un "agujero de Schwarzschild" para transportar a una nave americana a través del tiempo. Más allá de si la investigación científica en la física de agujeros de gusano lleva o no a la posibilidad práctica de construir máquinas del tiempo, es claro que esta ha servido de inspiración a innumerables guionistas y escritores de ciencia ficción. Es de esperar que lo siga haciendo. Se propone como ejercicio al lector intentar clasificar la paradoja inmersa en cada una de las siguientes películas: Lost in Space ("Perdidos en el Espacio", 1998), Event Horizon (1997), Star Trek: First Contact (1996), Twelve Monkeys ("Doce Monos", 1995), Timecop (1994), Millennium (1989), Star Trek IV: The Voyage Home (1986), The Final Countdown (1980) y The Time Machine (1960).

La conjetura de protección cronológica de Stephen Hawking: La existencia de agujeros de gusano atravesables está permitida por las leyes de la física, pero se asume como axioma que los viajes en el tiempo no son posibles; efectos cuánticos del estilo de los comentados arriba impedirían construir una máquina del tiempo. Para elaborar esta conjetura, Hawking se apoyó en la observación de que no hay evidencia alguna de turistas del futuro. Esta afirmación fue objetada por Thorne, quien probó que:

1. las máquinas del tiempo no permiten viajes a tiempos anteriores al de su creación, y
2. hasta el día de hoy, ninguna máquina del tiempo ha sido construida.

La conjetura de los científicos aburridos introducida por Matt Visser: Los agujeros de gusano atravesables no existen.

Para cuantificar el problema, es posible reformular la paradoja del matricidio en términos mecánicos, lo que da como resultado la llamada crisis de las bolas de billar. Esto evita la discusión del status del libre albedrío frente a la existencia de CTCs. Como se muestra en la Figura 5, imaginemos que una bola de billar, luego de entrar por la boca derecha de un agujero de gusano -convertido en una máquina del tiempo por el procedimiento descrito anteriormente- atraviesa el túnel en dirección de impacto consigo misma antes de que haya ingresado en el agujero de gusano, impidiéndole la entrada al mismo.

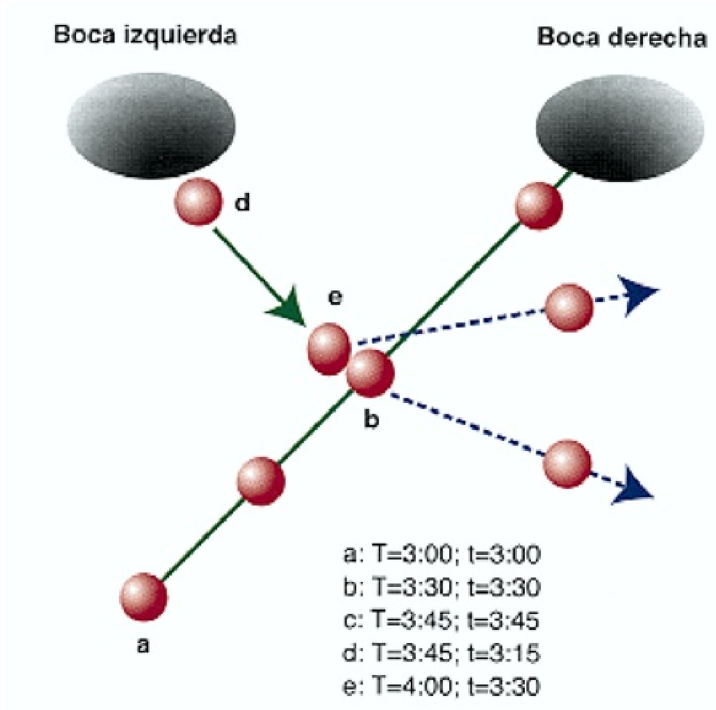


Figura 5. Crisis de las bolas de billar. Supongamos que el agujero de gusano se ha transformado en una máquina del tiempo, de forma tal que todo lo que entre en la boca de la derecha emerja por la boca izquierda 30 minutos antes. Existen trayectorias (como la de la figura) que no son consistentes en el sentido global. T representa el tiempo medido por relojes en el túnel y t el medido por aquellos en el espacio externo.

Las leyes de la Mecánica Clásica determinan una única trayectoria posible para cada conjunto de condiciones iniciales. Por el contrario, el estudio llevado a cabo por los alumnos de Thorne, Fernando Echeverría y Gunnar Klinkhammer, demostró que la existencia de máquinas del tiempo hace posible un número infinito de trayectorias para el movimiento de la bola. De ellas, solo algunas son consistentes en sentido global, y es de esperar que estas sean las que ocurran en el universo real.

Resta aún mucho por hacer en el análisis mecánico de las posibles paradojas. Más lejos aún estamos de entender cabalmente lo que ocurre en el caso de que cambiemos objetos que obedecen a la Mecánica Clásica, como las bolas de billar de la Figura 5, por objetos que obedecen a la mecánica cuántica.

Desde el inicio del siglo XX, la Relatividad General de Einstein ha proporcionado a los científicos una herramienta poderosa, aunque probablemente preliminar e incompleta, para analizar problemas como los planteados en este artículo. Hemos visto que la teoría admite la posibilidad de la existencia de soluciones compatibles con curvas temporales cerradas, que podrían ser utilizadas como atajos para viajar grandes distancias en el espacio. Sin embargo, todavía no existe una prueba definitiva en favor o en contra de la posible existencia de agujeros de gusano o de máquinas del tiempo. Probablemente, solo una teoría más desarrollada nos aproxime a tal respuesta. De cualquier forma, en numerosas instancias la ciencia nos ha llevado a aceptar la existencia de entidades más fascinantes e inesperadas que las imaginadas por las mentes más febriles. Es de esperar entonces que el futuro depare aún más sorpresas, y que respuestas definitivas sobre la existencia de los agujeros de gusano se obtengan pronto[44].

Glosario[45]

Curva temporal cerrada (CTC): trayectoria en la cual un observador que parte de un punto dado del espacio-tiempo y viajando siempre hacia el futuro (indicado por el cono de luz local) vuelve, al cabo de un cierto lapso, al punto de partida.

Diagrama de embedding: en estos diagramas, se "congela" una de las dimensiones del espacio curvo tridimensional, y se representa a la superficie bidimensional resultante en un espacio tridimensional euclídeo ordinario (esto es, no curvo). La tercera dimensión de este espacio no tiene relación alguna con la tercera dimensión del espacio tridimensional curvo. Estos diagramas ayudan a visualizar las propiedades geométricas de un espacio-tiempo dado.

---

[44] Páginas personales de M. Visser:http://www.physics.wustl.edu/~visser/index.html
Explorando el futuro de las naves espaciales y posibles medios de transporte con velocidades cercanas a las de la luz en http://www.lerc.nasa.gov. Ciencia ficción y máquinas del tiempo en http://www.scifi.cinema.com.

[45] Las siguientes son algunas lecturas sugeridas para el lector que desee ampliar sus conocimientos L. A. Anchordoqui-"Wormholes in spacetime with torsion", Modern Physics Letters A13, 1095 (1998); L. A. Anchordoqui S. E. Perez Bergliaffa and D. F. Torres-"Brans- Dicke wormholes in nonvacuum spacetime", Physical Review D55, 5226 (1997); L. A. Anchordoqui, G. E. Romero, D. F. Torres and I. Andruchow-"In search for natural wormholes", Modern Physics Letters A14, 791 (1999); L. A. Anchordoqui, D. F. Torres, M. L. Trobo and S. E. Perez Bergliaffa-"Evolving wormhole geometries", Physical Review D57, 829 (1998); P. Nahin-"Time Machines", AIP, New York, 1993; K. S. Thorne-"Black Holes and Time Warps: Einstein's Outreageous Legacy", W.W. Norton & Co., New York, 1994; D. F. Torres-"Tesis Doctoral", Universidad Nacional de La Plata, 1998; D. F. Torres, G. E. Romero and L. A. Anchordoqui-"Might some gamma ray bursts be an observable signature of natural wormholes?", Physical Review D58, 123001 (1998); D. F. Torres, G. E. Romero and L. A. Anchordoqui-"Wormholes, gamma ray bursts and the amount of negative mass in the universe", Modern Physics Letters A13, 1575 (1998) (Honorable Mention, Gravity Research Foundation Awards 1998) y M. Visser-"Lorentzian Wormholes", AIP, New York, 1996.

Fluctuaciones de vacío: oscilaciones en los valores de los campos (por ejemplo, electromagnéticos o gravitatorios) debido a intercambios momentáneos de energía entre regiones adyacentes del espacio-tiempo.

Horizonte cronológico: superficie que divide al espacio-tiempo en dos regiones, una donde la formación de CTCs es posible y otra donde estas no existen.

Principio de la relatividad: las leyes de la física no deben ser capaces de distinguir un sistema de referencia inercial de otro, esto es, deben tomar la misma forma en todos los sistemas.

Relatividad General: leyes de la física formuladas por Einstein, que describen la dinámica del campo gravitatorio.

Singularidad: región de espacio-tiempo donde la curvatura se hace tan fuerte que las leyes de la Relatividad General no son más válidas y debería describirse por una teoría cuántica de gravitación. Si se extrapolara la Relatividad General a este dominio, se encontraría que las fuerzas gravitatorias son infinitas.

Sistema de referencia inercial: un laboratorio idealizado para realizar experimentos, que se mueve a través del espacio sin aceleración.

Horizonte de eventos: superficie del espacio-tiempo que delimita una región (interior) de la cual nada puede escapar. Las propiedades del horizonte son semejantes a las de una membrana que solo deja pasar sustancias en una dirección.

Capítulo 12
Observaciones Finales[46]

En esta Conferencia hemos presentado una gran variedad de paradojas matemáticas, pertenecientes a diferentes períodos históricos. Ellas fueron el resultado (entre otras cosas) de debates y controversias entre los matemáticos, contraejemplos que hicieron fallar nociones que parecían inmutables, y la aplicación de un "argumento por analogía" el cual sugería la extrapolación de procedimientos de un caso dado a aquellos que parecían casos semejantes sin suficiente justificación. E esta manera queremos destacar que estos fenómenos paradójicos han tenido un impacto sustancial sobre el desarrollo de la Matemática por el refinamiento y reconstrucción de conceptos, la reafirmación de teorías existentes y el surgimiento de algunas nuevas. Por supuesto, este proceso continúa.

A lo largo de esta Conferencia, he sugerido cómo utilizar dichas paradojas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Ellas pueden generar curiosidad, aumentar la motivación, crear un ambiente efectivo para el debate, anima el análisis de las hipótesis subyacentes y muestra que los errores lógicos y los argumentos erróneos no son un hecho común en la empresa matemática.

Los estudiantes son advertidos a menudo de la necesidad de evitar "trampas" tales como dividir por cero, multiplicar una desigualdad por un número negativo sin invertir el sentido de la misma, reordenar los términos de una serie condicionalmente convergente, no verificar que una aplicación está bien definida. La presentación a los estudiantes de ejemplos de paradojas, con las transgresiones que

---

46 Algunos de los sitios donde se pueden encontrar mayores detalles sobre estos temas son los siguientes
http://members.aol.com/kiekeben/zeno.html,
http://www.shu.edu/proiects/reals/historv/zeno.html
http://chandra.bgsu.edu/~gcd/Zeno.paradoxes.html,
http://mathpages.com/rr/s3-07/3-07.htm,
http://www.deltalink.com/dodson/html/puzzle.html,
http://www.iimlov.com/phvsics/zeno.htm.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Beginnings of set theory.html,
http://logic.stanford.edu/kif/Hypertext/node25.html,
http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/sp.htm,
http://mathforum.org/isaac/problems/paradox.html,
http://mathforum.org/epigone/sci.math.symbolic/sneenoupri.
http://freespace.virgin.net/steve.preston/Time.html,
http://www.theory.caltech.edu/people/patricia/lctoc.html,
http://www.friesian.com/paradox.htm,
http://www.sfu.ca/philosophy/swartz/time travel1.htm,
http://www.wordsmith.demon.co.uk/paradoxes/,
http://www.abelard.org/metalogic/metalogicA3.htm,
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/2629/parado.htm#PBT,
http://www.elalmanaque.com/acertiios/paradoias1.htm

traen aparejadas, es seguramente preferible a amonestarlos con el consabido “esto no se debe hacer”.